

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS VI

Spécialité :
Mathématiques

présentée par
Bénédicte PUIG

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS VI

Sujet de la thèse :

Modélisation et simulation de processus stochastiques non gaussiens

soutenue le 14 Mai 2003

devant le jury composé de :

Pr. J. Lacroix,	Directeur de thèse
Pr. P. Bernard,	Rapporteur
Pr. D. Lamberton,	Rapporteur
M. F. Poirion,	Examineur
Pr. P. Priouret,	Examineur
Pr. C. Soize,	Examineur

Avant-propos

Ce travail de thèse s'est déroulé au sein de l'Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques (ONERA) dans l'unité DDSS/MS (Département Dynamique des Structures et Systèmes couplés, unité Modélisation mécanique et Simulation numérique). Je tiens à remercier tout particulièrement M. Fabrice Poirion pour son encadrement, ses encouragements et ses partitions. Je remercie également M. Jean-Luc Akian pour son aide précieuse.

Cette thèse s'inscrit aussi dans le cadre du Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires de l'Université Paris VI. Je souhaite exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. le Professeur Jean Lacroix qui a dirigé cette thèse.

Je remercie MM. les Professeurs Pierre Bernard et Damien Lambertson d'avoir accepté de rapporter ce travail de recherche. J'exprime également toute ma gratitude à MM. les Professeurs Pierre Priouret et Christian Soize qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury.

Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour les nombreuses personnes sympathiques côtoyées à l'ONERA (DDSS/MS, ASCO ...), notamment pour l'efficace Valérie Gallina et pour tous les doctorants et jeunes docteurs qui ont éclairé de leur bonne humeur ces années de thèse.

Table des matières

Introduction générale	11
Abréviations	13
I Simulation de processus et champs gaussiens	15
1 Processus généralisés	16
1.1 Espaces nucléaires	16
1.2 Théorème de Minlos	17
2 Bruit blanc scalaire	19
3 Bruit blanc et processus stochastiques ordinaires scalaires	21
4 Markovianisation approchée	23
4.1 Définition des espaces	23
4.2 Réalisation markovienne	24
4.3 Principe de markovianisation approchée	25
4.4 Construction et simulation d'un processus à réalisation markovienne de dimension finie	25
4.5 Cas champ	26
5 Simulation utilisant les polynômes d'Hermite	28
5.1 Définition des espaces	28
5.2 Construction de ϕ	28
5.2.1 Une base de $L^2(\mathbb{R}^d)$	30
5.2.2 Projection	31
6 Méthode spectrale	31
6.1 Définition des espaces	32
6.2 Construction de ϕ	32
6.3 Une base de $L^2(T)$	33

6.4	Simulation numérique	34
7	Cas non stationnaire	35
7.1	Représentation de Karhunen-Loève	36
7.1.1	Définition des espaces	36
7.1.2	Une base de $L^2([0, T], \mathbb{R})$	36
7.1.3	Construction de ϕ_x et simulation	37
7.2	Ondelettes	37
7.2.1	Définition des espaces	37
7.2.2	Base d'ondelettes	38
7.2.3	Construction de ϕ_x et simulation	38
II	Simulation de processus et champs stochastiques non gaussiens : Etat des lieux	41
1	Modélisation d'un processus non gaussien strictement stationnaire par un processus de Poisson filtré	41
1.1	Principe	42
1.2	Simulation	42
1.2.1	Détermination de $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$, F et Y_1	42
1.2.2	Simulation numérique	43
2	Méthode d'inversion pour les processus non gaussiens strictement stationnaires	44
2.1	Principe	44
2.2	Schéma itératif	45
3	Simulation de processus non gaussiens non stationnaires	46
3.1	Projection sur la base des polynômes d'Hermite	46
3.2	Calcul de la fonction d'autocorrélation du processus gaussien sous-jacent	47
3.3	Simulation du processus non gaussien via la représentation de Karhunen-Loève	47

III Simulation de processus et champs stochastiques non gaussiens à

l'aide des polynômes d'Hermite	49
1 Description de la méthode	49
1.1 Données	50
1.2 Loi de Y_t	51
1.3 Utilisation des polynômes d'Hermite	51
2 Techniques de simulation	53
2.1 Détermination de R_G	53
2.2 Détermination de la fonction d'autocorrélation pour la méthode spectrale	54
2.3 Détermination de la fonction d'autocorrélation pour la méthode de markovianisation	55
3 Estimation	58
3.1 Ergodicité	58
3.2 Estimation	58
3.2.1 Ergodicité du modèle	58
3.2.2 Estimation des moments	59
3.2.3 Estimation de la densité spectrale	59
4 Expériences numériques	60
4.1 Simulation via la méthode spectrale	60
4.1.1 Premier exemple de densité spectrale	60
4.1.2 Cas 1 : seuls les moments sont fixés	61
4.1.3 Cas 2 : loi marginale imposée	64
4.1.4 Deuxième exemple de densité spectrale	66
4.1.5 Cas 1	66
4.1.6 Cas 2	68
4.2 Simulation via la markovianisation	68
4.2.1 Densité spectrale de type Von Karman, Cas 1	69
4.2.2 Densité spectrale de type Von Karman, Cas 2	70
4.2.3 Densité spectrale de type Pierson-Moskowitz, Cas 1	71
4.2.4 Densité spectrale de type Pierson-Moskowitz, Cas 2	72
4.3 Cas d'un champ scalaire	72
4.3.1 Premier exemple de densité spectrale	73
4.3.2 Cas 1 : moments fixés	73

4.3.3	Cas 2 : loi marginale imposée	73
4.3.4	Deuxième exemple de densité spectrale	74
4.3.5	Cas 1 : moments fixés	75
4.3.6	Cas 2 : loi marginale imposée	75
4.4	Commentaires	76
IV	Étude de la série	79
1	Résultats de convergence	79
1.1	Convergence en moyenne quadratique	79
1.2	Majoration de l'erreur	81
1.3	Convergence presque sûre	83
1.4	Cas particulier	84
2	Remarques sur le cas non stationnaire	91
V	Problème des moments	93
1	Problème classique des moments	93
1.1	Existence	94
1.2	Unicité	95
2	Cas des processus	96
2.1	Théorème d'extension de Kolmogorov	96
2.2	Problème des moments pour les processus	97
3	Maximum d'entropie	99
3.1	Introduction	99
3.2	Principe de maximum d'entropie	100
	Annexes	103
A	Processus stochastiques du second ordre	103
A.1	Stationnarité	103

A.2	Représentation intégrale	103
B	Échantillonnage	105
C	Polynômes d’Hermite	105
C.1	Définition et premières propriétés	105
C.2	Polynômes d’Hermite appliqués à un vecteur aléatoire gaussien standard	106
D	Relation entre équation différentielle d’Itô et équation différentielle au sens des distributions	107
E	Mouvement brownien à plusieurs paramètres et Intégrale de Wiener-Itô	114
	Bibliographie	119

Introduction générale

Pour les applications pratiques telles que les calculs de fatigue, d'endommagement ou de contrôle, les ingénieurs ont modélisé pendant longtemps les phénomènes géophysiques (vent, houle, séismes, etc...) par des processus stochastiques gaussiens. Et cela pour plusieurs raisons, la principale étant qu'un processus gaussien est caractérisé par la donnée de deux grandeurs déterministes : sa fonction moyenne et sa fonction d'autocorrélation, grandeurs qui sont aisées à estimer expérimentalement. Une deuxième raison est que, dans le cadre d'hypothèses linéaires, la réponse d'un système linéaire à une excitation modélisée par un processus gaussien est encore un processus gaussien dont les caractéristiques sont immédiatement obtenues par les résultats de la théorie du filtrage linéaire. Enfin, il existe des méthodes simples et peu gourmandes en puissance de calcul pour simuler les trajectoires de processus gaussiens.

Depuis quelques temps, la nécessité de réduire les coûts de conception des systèmes (avions, véhicules...), l'introduction de modèles plus réalistes de systèmes non linéaires ainsi que la volonté d'appliquer des règlements relatifs à la sécurité plus sévères, parallèlement aux progrès techniques effectués dans le domaine des ordinateurs, ont amenés les industriels à intégrer de plus en plus dans leurs codes des méthodes de simulation de Monte-Carlo. Dans ce contexte est apparu le besoin de modéliser des chargements aléatoires en accord avec les chargements réels qui ont souvent, comme de nombreuses mesures l'ont montré (voir par exemple [41]), des caractéristiques typiquement non gaussiennes.

Quelques méthodes ont été proposées pour générer des trajectoires de processus non gaussiens ([20, 25, 51, 55, 60, 61, 75]). La principale difficulté réside dans la caractérisation des processus : alors que dans le cas particulier des processus gaussiens seule la donnée des fonctions moyenne et autocorrélation suffit à déterminer complètement le processus, dans le cas général l'ensemble (infini) des systèmes de loi finies-dimensionnelles $\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), n \geq 1, t_i \in \mathbb{R}\}$ doit être connu pour caractériser le processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$. Evidemment, une telle donnée n'est jamais accessible en pratique pour les excitations réelles évoquées plus haut et on doit se contenter d'une description partielle des processus non gaussiens. La quantité minimum raisonnable d'information utilisée pour «approcher» le comportement réel du processus non gaussien doit inclure la loi marginale d'ordre un et la fonction d'autocorrélation. Mais souvent même la loi marginale d'ordre un n'est pas connue

et l'on doit traiter le problème de simulation avec la seule donnée d'un nombre fini de ses moments.

Le but de cette thèse est justement, afin de répondre notamment à l'attente des industriels, de proposer un modèle de processus (champ) non gaussien, stationnaire, à valeur dans $\mathbb{R}$ et une méthode de simulation de ses trajectoires dans un cadre plus général et/ou mieux justifié mathématiquement que les méthodes déjà existantes.

Si le but central de la thèse est celui-ci, notre contribution se trouve cependant disséminée dans plusieurs parties du mémoire. En effet, outre les parties III et IV qui répondent directement au sujet, une réflexion originale est apportée sur les méthodes de simulation des processus gaussiens dans la première partie, le problème classique des moments étendu au cas des processus est examiné dans la partie V et deux démonstrations relatives à la première partie figurent en annexes D et E.

Le mémoire s'organise de la manière suivante. Dans la première partie, nous donnons une formule de représentation générale via le bruit blanc gaussien permettant de trouver ou retrouver les méthodes de simulation des processus gaussiens. Deux de ces méthodes de simulation, la méthode spectrale et de réalisation markovienne, sont utilisées ensuite dans les techniques de simulation non gaussienne. La deuxième partie est consacrée à l'étude bibliographique des méthodes de simulation non gaussienne relevées dans la littérature relative à l'ingénierie mécanique. Dans la troisième partie est proposée une méthode de simulation de processus non gaussien strictement stationnaire sous la donnée de la loi marginale d'ordre un, ou des premiers moments de cette loi, et de la fonction d'autocorrélation. Les méthodes de simulation des processus gaussiens étant connues et efficaces, l'idée est donc de considérer une transformation non linéaire de processus gaussien pour obtenir un processus non gaussien. Ainsi dans cette partie, sont d'abord décrites la transformation non linéaire considérée, sa projection sur la base des polynômes d'Hermite ainsi que la détermination de la fonction d'autocorrélation du processus gaussien sous-jacent. Puis des expériences numériques mettent en oeuvre et illustrent ces méthodes de simulation. Les convergences du modèle sont étudiées dans la quatrième partie. La cinquième partie traite du problème classique des moments et de son extension au cas des processus, le principe du maximum d'entropie est par ailleurs exposé, ceci étant directement lié aux données du problème. Enfin, en annexe, figurent quelques rappels élémentaires (annexes A, B et C) ainsi que deux points (annexes D et E) relatifs à la connexion entre les notions de bruit blanc et mouvement brownien à laquelle nous nous sommes intéressés lors de l'étude de la simulation gaussienne.

Abréviations

- v.a.: variable aléatoire,
- m.q.: moyenne quadratique,
- i.i.d.: indépendantes identiquement distribuées,
- p.s.: presque sûrement.

I SIMULATION DE PROCESSUS ET CHAMPS GAUSSIENS

De nombreuses méthodes de simulation de processus et champs stochastiques gaussiens existent. Elles sont décrites de manières indépendantes dans la littérature ([4, 11, 18, 25, 30, 31, 36, 37, 53, 64, 69, 70, 71]). L'originalité de cette partie est de donner une présentation unifiée de toutes ces méthodes de simulation. Pour cela, afin de dégager des points communs, nous avons utilisé la théorie des processus généralisés et spécialement celle du bruit blanc.

Dans les années 1950, Guelfand et Itô ont introduit indépendamment la notion de processus stochastique généralisé. Car la notion de processus stochastique ordinaire ne suffit pas toujours pour décrire certains phénomènes physiques. On peut par exemple évoquer (cf Guelfand et Vilenkin [19]) le fait qu'un appareil de mesure ne fournit pas la valeur exacte de la grandeur aléatoire X_t à l'instant t mais une certaine grandeur moyenne :

$$X_\phi = \int \phi(t) X_t dt$$

où ϕ caractérise l'appareil de mesure. Imaginons que l'on fasse la mesure avec plusieurs appareils différents. X_ϕ définit alors une fonction aléatoire linéaire en ϕ , i.e un processus généralisé. Plus généralement, les processus généralisés sont des processus pour lesquels les trajectoires ne sont pas données par des fonctions mais plutôt par des fonctions généralisées. Le bruit blanc gaussien en est l'exemple le plus classique. La loi d'un tel processus est une mesure de probabilité sur un espace de fonctions généralisées et cet espace doit être spécifié pour chaque processus généralisé.

Rappelons que la loi d'un processus (champ) stochastique ordinaire $(X_t, t \in \mathbb{R}^d)$, sous des hypothèses de compatibilité, est totalement caractérisé par la donnée des lois finies-dimensionnelles $\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}), k \in \mathbb{N}^*, (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k\}$ (théorème d'extension de Kolmogorov). En ce qui concerne les processus généralisés, on peut donc se demander si la connaissance des lois finies-dimensionnelles $\mathcal{L}(X_{\phi_1}, \dots, X_{\phi_k})$, où $k \in \mathbb{N}^*$ et où les ϕ_i appartiennent à un espace vectoriel topologique E , permet de caractériser la loi du processus $(X_\phi, \phi \in E)$. Le théorème de Minlos donne la réponse, il est exposé en détail dans le chapitre suivant.

Puis nous nous attacherons à la description du bruit blanc gaussien. Ce processus généralisé

nous sera en effet très utile pour exposer ensuite de manière générale les techniques de simulation de processus (champs) stochastiques gaussiens ordinaires.

1 Processus généralisés

Nous rappelons ici le contexte mathématique nécessaire à la définition des processus généralisés et en particulier le théorème de Minlos.

1.1 Espaces nucléaires

Le théorème de Minlos est souvent énoncé sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (espace des distributions tempérées). En toute généralité, il nécessite la notion d'espace localement convexe nucléaire, dont $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un exemple classique.

Définition 1.1.1 (Espace dénombrablement hilbertien)

Soit E un espace vectoriel topologique muni d'une famille de normes $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dérivant des produits scalaires $((\cdot, \cdot)_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. E est dit dénombrablement hilbertien si les assertions suivantes sont vérifiées :

- i. Les normes $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont compatibles, c'est à dire telles que si une suite tend vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_n$ et si cette suite est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_m$ alors elle converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_m$.
- ii. Les normes vérifient les inégalités $\|\cdot\|_n \leq \|\cdot\|_m$ pour $n \leq m$ (on peut aisément se ramener à ce cas) de sorte que $E_m \subset E_n$ où E_i désigne le complété de E pour la norme $\|\cdot\|_i$ (E_i est donc un espace de Hilbert).
- iii. E est complet pour la topologie définie par le système fondamental de voisinage de l'origine :

$$U_n(\epsilon) = \{x \in E, \|x\|_n < \epsilon\}, \quad (\epsilon > 0).$$

Remarques 1.1.2

- Pour cette topologie E est un espace de Fréchet et $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$.

- Examinons le dual E' de E . Soit E'_n dual de E_n . On a :

$$E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n.$$

Définition 1.1.3 (Espace nucléaire)

(On garde les notations de la définition précédente)

E espace dénombrablement hilbertien est dit nucléaire si pour tout m il existe $n > m$ tel que l'injection canonique

$$T_m^n : E_n \rightarrow E_m$$

est nucléaire.

Remarques 1.1.4

- Dans cette définition on peut se contenter de supposer que T_m^n est un opérateur de Hilbert-Schmidt (car la composition de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur nucléaire).
- À cette définition correspond une définition géométrique équivalente (voir par exemple [38]) : un espace dénombrablement hilbertien est dit nucléaire si l'ellipsoïde $\mathcal{E}_n = \{\|\phi\|_{n+1} = 1\}$ est compacte pour la norme $\|\cdot\|_n$ et si la somme (ou la somme des carrés) des demi-axes principaux forme une série convergente.

Nous donnerons des exemples d'espaces nucléaires plus loin (voir aussi [9], [21] et [46]).

1.2 Théorème de Minlos

La définition d'espace nucléaire acquise, on peut alors énoncer le théorème fondamental pour la construction des processus généralisés. Le théorème de Minlos proprement dit est un théorème d'extension de mesure (voir l'article de Minlos [38] pour l'énoncé et la démonstration). En effet, on construit tout d'abord les processus généralisés sur des ensembles cylindriques de E' ce qui fait apparaître des mesures simplement additives. Le résultat démontré par Minlos est que toute mesure de probabilité simplement additive définie sur la tribu cylindrique de E' , espace dual de E nucléaire, est prolongeable à une mesure de probabilité σ -additive définie sur la tribu borélienne de E' . On peut interpréter ce résultat comme une «extension» du théorème de Kolmogorov.

Nous nous intéressons plutôt à une autre formulation ([21], [23], [24]), qui elle peut être vue

comme une extension du théorème de Bochner. Aussi le théorème suivant est souvent appelé théorème de Bochner-Minlos.

Théorème 1.2.1 (Minlos)

Soit C une fonction définie sur E espace nucléaire telle que

- il existe p tel que C est continue pour la norme $\|\cdot\|_p$,
- C est de type positif,
- $C(0) = 1$.

Alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur $(E', \mathcal{B}(E'))$ telle que pour tout $\phi \in E$

$$\int_{E'} \exp(i \langle \omega, \phi \rangle) d\mu(\omega) = C(\phi), \quad (1.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité.

(C est une fonction caractéristique sur E)

On rappelle ici la notion de processus généralisé :

Définition 1.2.2

Un processus généralisé est un système de v.a. indexé par l'espace des paramètres E (espace nucléaire)

$$(X_\phi, \phi \in E),$$

défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et tel que l'application $\phi \mapsto X_\phi$ est linéaire et continue, i.e. (cf [19]) quel que soit $(\Phi_{k1}, \dots, \Phi_{kn})$ tendant vers $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, la loi jointe de $(X_{\Phi_{k1}}, \dots, X_{\Phi_{kn}})$ tend vers celle de $(X_{\Phi_1}, \dots, X_{\Phi_n})$.

On peut alors introduire la définition suivante :

Définition 1.2.3

(avec les notations du théorème)

Soit

$$C(\phi) = \int_{\Omega} \exp(iX_\phi) d\mathbb{P}$$

la fonction caractéristique du processus généralisé $(X_\phi, \phi \in E)$. La mesure de probabilité μ correspondante (dont l'existence est donnée par le théorème de Minlos) est appelée distribution ou loi de (X_ϕ) et $C(\phi)$ est la fonction caractéristique de μ .

2 Bruit blanc scalaire

Le bruit blanc gaussien est l'exemple le plus simple de processus généralisé. On s'intéresse ici au bruit blanc à valeurs scalaires (i.e. dans $\mathbb{R}$). Pour le définir, précisons d'abord les espaces qui entrent en jeu.

Soit H un espace de Hilbert. On identifie H et son dual. Soit $\mathcal{X}$ espace vectoriel topologique réel localement convexe tel que :

- $\mathcal{X}$ est le dual d'un espace nucléaire $\mathcal{Y}$,
- $\mathcal{Y}$ est un sous-espace dense de H et l'injection $\mathcal{Y} \rightarrow H$ est continue.

On a donc le triplet $\mathcal{Y} \subset H \subset \mathcal{X}$ (où les inclusions désignent des injections continues), appelé triplet hilbertien ou triade hilbertienne dans [19] .

On note $(\cdot, \cdot)_H$ et $\|\cdot\|_H$ le produit scalaire et la norme associés à l'espace de Hilbert H .

D'après le théorème de Minlos, il existe une mesure de probabilité μ_W sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{Y}, \quad \int_{\mathcal{X}} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu_W(\omega) = e^{-\frac{\|\phi\|_H^2}{2}}. \quad (2.1)$$

On définit alors le processus généralisé «bruit blanc» W :

$$W : \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$(\phi, \omega) \mapsto \langle \omega, \phi \rangle. \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

D'autre part, on note à ϕ fixé:

$$W_\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$\omega \mapsto \langle \omega, \phi \rangle. \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

W_ϕ est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, \|\phi\|_H^2)$.

Remarque 2.1

Très souvent le bruit blanc est défini pour $\mathcal{Y} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{X} = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Dans ce cadre précis, il existe des connections entre le bruit blanc gaussien (processus généralisé) et le mouvement brownien standard (processus stochastique ordinaire). En effet, prenons dans un

premier temps $\mathcal{Y} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, $H = L^2(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{X} = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^+)$. Le mouvement brownien $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ peut être défini sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mu_W)$ par :

$$B_t(\omega) = \langle \omega, \mathbb{I}_{[0,t]} \rangle .$$

Bien que la fonction indicatrice $\mathbb{I}_{[0,t]}$ n'appartienne pas à $\mathcal{Y} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{I}_{[0,t]}$ peut être approchée par une suite $(\phi_n)_n$ de fonctions de $\mathcal{Y}$ (par densité) et

$$\langle \omega, \mathbb{I}_{[0,t]} \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \omega, \phi_n \rangle$$

existe et est indépendant du choix de la suite $(\phi_n)_n$. On peut par ailleurs définir le mouvement brownien sur tout $\mathbb{R}$ en remplaçant $\mathbb{I}_{[0,t]}$ par $\text{sign}(t) \times \mathbb{I}_{[t \wedge 0, t \vee 0]}$. Enfin on peut aussi aisément définir le mouvement (ou drap) brownien sur $\mathbb{R}_+^d$ par

$$B_{t_1, \dots, t_d}(\omega) = \langle \omega, \mathbb{I}_{[0,t_1] \times \dots \times [0,t_d]} \rangle ,$$

$$(\text{respectivement } B_{t_1, \dots, t_d}(\omega) = \langle \omega, \prod_{i=1}^d \text{sign}(t_i) \mathbb{I}_{[t_i \wedge 0, t_i \vee 0]} \rangle \text{ sur } \mathbb{R}^d).$$

À l'aide de cette définition du mouvement brownien, il est naturel de définir l'intégrale de Wiener-Itô de $L^2(\mathbb{R}^d)$ par (cf [24] et annexe E)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dB(x, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \omega, \phi \rangle, \quad \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Par intégration par parties pour les intégrales de Wiener-Itô, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dB(x) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) B(x) dx.$$

On s'intéresse à cette dernière égalité dans l'annexe E.

Donc

$$\begin{aligned} W_\phi &= \left((-1)^d \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}, B \right) \\ &= \left(\phi, \frac{\partial^d B}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \right), \end{aligned}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire standard de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

En d'autres termes, au sens des distributions, on a

$$W = \frac{\partial^d B}{\partial x_1 \dots \partial x_d}.$$

3 Bruit blanc et processus stochastiques ordinaires scalaires

On garde les notations du paragraphe précédent.

En utilisant la notion de bruit blanc, on peut construire des processus (champs) stochastiques ordinaires gaussiens, comme on le montre ci-après.

Soit $(\phi_x, x \in \mathbb{R}^d)$ une famille de fonctions de $\mathcal{Y}$. On considère le champ stochastique ordinaire

$$X_x = W_{\phi_x} \quad (3.1)$$

$$= \langle \omega, \phi_x \rangle. \quad (3.2)$$

Proposition 3.1

$(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ est un champ stochastique gaussien centré de fonction d'autocorrélation

$$R_X(x, y) = (\phi_x, \phi_y)_H. \quad (3.3)$$

Preuve

Par linéarité de W , on a

$$\mathbb{E}(\exp(i(t_1 X_x + t_2 X_y))) = \mathbb{E}(\exp(iW(t_1 \phi_x + t_2 \phi_y))) \quad (3.4)$$

$$= \exp\left(-\frac{\|t_1 \phi_x + t_2 \phi_y\|_H^2}{2}\right) \quad (3.5)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(t_1 \ t_2)\Gamma(t_1 \ t_2)^T\right) \quad (3.6)$$

où

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \|\phi_x\|_H^2 & (\phi_x, \phi_y)_H \\ (\phi_x, \phi_y)_H & \|\phi_y\|_H^2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$R_X(x, y) = (\phi_x, \phi_y)_H \quad (3.7)$$

□

Supposons maintenant H séparable. Il existe donc une base orthonormée dénombrable $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}$ de H . Ce qui permet d'obtenir une formule explicite pour la simulation du bruit blanc. On peut en effet écrire :

$$\forall \phi \in \mathcal{Y}, \quad W_\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i W_{e_i}, \quad (3.8)$$

où $\alpha_i = (\phi, e_i)_H$,
la série convergeant dans $L^2(\mathcal{X}, \mu_W)$ et où l'on remarque que $(W_{e_i})_i$ est une suite de v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Enfin, toujours sous l'hypothèse H séparable, on peut de même écrire une formule générale de représentation des champs gaussiens $(X_x = W_{\phi_x}, x \in \mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.2

Soit de nouveau $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}$ base orthonormée de H (séparable). On a
 $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et $\forall \phi_x \in \mathcal{Y}$,

$$\begin{aligned} X_x &\stackrel{\text{déf}}{=} W_{\phi_x} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) W_{e_i}, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_i(x) = (\phi_x, e_i)_H,$$

la série convergeant dans $L^2(\mathcal{X}, \mu_W)$.

Cette représentation permet de séparer le temps et l'aléa. On comprend aisément l'intérêt d'une telle représentation pour la simulation : en effet, la formule de simulation numérique consiste donc en une combinaison linéaire de v.a. gaussiennes indépendantes, les coefficients étant des fonctions déterministes.

Dans la suite nous présentons diverses méthodes de simulation de processus stochastiques gaussiens sous cet angle. Les espaces $\mathcal{Y}$, H et $\mathcal{X}$ seront donc précisés ainsi que les fonctions ϕ_x et, selon le cas, la base $(e_i)_i$. Le but est de montrer que toutes les méthodes classiques de simulation de champs gaussiens, rencontrées de manière indépendante dans la littérature, découlent directement de la représentation générale des champs.

Remarque 3.0.4 (importante)

Par densité de $\mathcal{Y}$ dans H , on peut étendre tous ces résultats à $(\phi_x, x \in \mathbb{R}^d)$ famille de fonctions de H . De même on peut prendre la base $(e_i)_i \subset H$. Cela sera souvent utilisé dans la suite.

4 Markovianisation approchée

Cette méthode de simulation est fondée sur le principe de réalisation markovienne des processus gaussiens centrés à spectre rationnel. En mécanique aléatoire, les densités spectrales des processus modélisant des phénomènes physiques tels que la houle ou le vent ne sont en général pas rationnelles. Cependant ces processus sont souvent physiquement réalisables (i.e sont le résultat du filtrage causal et stable d'un bruit blanc) et donc leur spectre est «approchable» par des spectres rationnels.

Dans un premier temps nous décrivons les espaces sur lesquels on se place. Ensuite la notion de réalisation markovienne sera explicitée. Enfin, le principe de markovianisation approchée et la simulation numérique qui en découle seront exposés.

4.1 Définition des espaces

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^+$, est un espace nucléaire (cf [9]). De plus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ est dense dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+)$. On peut donc se placer dans le contexte du paragraphe sur le bruit blanc en posant :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} &= \mathcal{S}(\mathbb{R}^+), \\ H &= L^2(\mathbb{R}^+), \\ \mathcal{X} &= \mathcal{S}'(\mathbb{R}^+).\end{aligned}$$

Il existe donc une unique mesure de probabilité μ_W sur $\mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+))$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \cdot, \phi \rangle}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+)} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu_W(\omega) \quad (4.1)$$

$$= e^{-\frac{\|\phi\|_2^2}{2}} \quad (4.2)$$

(où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme canonique de $L^2(\mathbb{R}^+)$).

Tout étant maintenant précisé, il n'y a plus aucune ambiguïté sur le bruit blanc W considéré. D'autre part, comme remarqué plus haut, si on considère le mouvement brownien $B_x = W(\mathbb{I}_{[0,x]})$, W est le processus dérivé de B (au sens des distributions). On notera donc $W = DB$ (D désignant la dérivation au sens processus généralisés). Il est d'ailleurs important de remarquer que, dans le cas précis où nous nous trouvons, les notions d'équation différentielle stochastique d'Itô et d'équation différentielle au sens processus généralisés coïncident (voir [31] et annexe D).

4.2 Réalisation markovienne

Définition 4.2.1

On dit qu'un processus $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ admet une réalisation markovienne de dimension finie en observant un processus $(\xi_x, x \in \mathbb{R}^+)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe une matrice A asymptotiquement stable, $Q \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathbb{R}^n$ tels que :

- i. $D\xi - A\xi = QW$, où W est un bruit blanc,
- ii. $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ est équivalent au processus $(B^T \xi_x, x \in \mathbb{R}^+)$.

Le processus $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ ainsi défini est donc le résultat d'un filtrage causal de bruit blanc (cf [31]). En effet, soit $\psi(t) = \exp(tA)Q$, filtre causal défini pour $t \geq 0$. Le processus $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ s'obtient à l'aide du filtre causal $\phi = B^T \psi$. C'est à dire

$$\begin{aligned} X_x(\omega) &= (W(\cdot, \omega) * \phi)(x) \\ &= \langle \omega, \check{\phi}_x \rangle \\ \text{où } \check{\phi}_x(y) &= \phi(x - y). \end{aligned}$$

Le processus $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ admet alors une densité spectrale :

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}^+} e^{-i\omega x} \phi(x) dx \right|^2.$$

D'autre part (cf [31]), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-i\omega x} \phi(x) dx = R(i\omega)Q^{-1}(i\omega),$$

où Q est le polynôme caractéristique de A et R est un polynôme dont les coefficients sont donnés par les vecteurs B et Q . On a en particulier le théorème suivant :

Théorème 4.2.2 (Réalisation)

$(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ est à réalisation markovienne (de dimension finie) ssi $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ admet une densité spectrale de type rationnel

$$S_X(\omega) = \left| \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2$$

avec

- Q polynôme à coefficients réels à racines dans $\{p \in \mathbb{C} / \text{Ré} p < 0\}$,
- R polynôme à coefficients réels, de degré strictement inférieur à celui de Q .

4.3 Principe de markovianisation approchée

La classe de Hardy $H_+^2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des transformées de Laplace des éléments de $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Une fraction rationnelle de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ appartient à $H_+^2(\mathbb{C})$ ssi ses pôles sont dans le demi-plan $\text{Re}(z) < 0$, ce qui est bien le cas dans le théorème précédent. D'autre part une fonction f quelconque appartient à $H_+^2(\mathbb{C})$ ssi elle vérifie la condition de Paley-Wiener :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln(|f(\omega)|)}{(1 + \omega^2)} d\omega > -\infty .$$

Le principe de markovianisation approchée se fonde sur le résultat de densité suivant :

Théorème 4.3.1

L'ensemble des fonctions rationnelles $\omega \mapsto R(i\omega)/Q(i\omega)$ qui sont dans $H_+^2(\mathbb{C})$ est dense dans $H_+^2(\mathbb{C})$.

On peut se reporter à [31] pour la démonstration.

Soit $(Y_x, x \in \mathbb{R}^+)$ processus gaussien stationnaire centré du second ordre admettant pour densité spectrale

$$S_Y(\omega) = |G(i\omega)|^2,$$

avec $G \in H_+^2(\mathbb{C})$. Le principe de markovianisation approchée est donc, grâce au résultat de densité du théorème, d'approcher G par une fraction rationnelle de $H_+^2(\mathbb{C})$. On cherche ainsi à approcher $(Y_x, x \in \mathbb{R}^+)$ «au sens de l'énergie», c'est à dire :

on cherche $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ processus gaussien de densité spectrale S_X telle que

$$\|S_Y - S_X\|_1^2 < \epsilon$$

(proximité de l'énergie à ϵ près).

Pour ce qui concerne la simulation numérique, on ne va donc pas simuler le processus $(Y_x, x \in \mathbb{R}^+)$ qui modélise le phénomène physique mais un processus $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ de densité spectrale rationnelle aussi proche que l'on veut de $(Y_x, x \in \mathbb{R}^+)$ au sens de l'énergie. Un algorithme pour déterminer ce spectre rationnel est proposé dans l'article de Bernard et Bonnemoy [2].

4.4 Construction et simulation d'un processus à réalisation markovienne de dimension finie

On souhaite donc simuler le processus $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ décrit ci-dessus. Sa densité spectrale est de la forme $S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2$ où $R(i\omega)/Q(i\omega) \in H_+^2(\mathbb{C})$. Pour cela, soit $(\tilde{\xi}_x, x \in \mathbb{R}^+)$ processus

tel que $S_{\tilde{\xi}}(\omega) = \frac{1}{|Q(i\omega)|^2}$. Le processus $(\tilde{\xi}_x, x \in \mathbb{R}^+)$ est solution de l'équation (où W bruit blanc gaussien)

$$Q(D)\tilde{\xi} = W. \quad (4.3)$$

Considérons

$$X = R(D)\tilde{\xi}.$$

En notant $\xi_x = (\tilde{\xi}_x, D\tilde{\xi}_x, \dots, D^{q-1}\tilde{\xi}_x)^T$, A la matrice compagnon du polynôme Q et $Q = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^q$, l'équation (4.3) se reformule de la manière suivante

$$D\xi - A\xi = QW. \quad (4.4)$$

On a alors

$$X_x = B^T \xi_x,$$

où $B^T = (R_0, R_1, \dots, R_{q-1})$ (coefficients du polynôme R) et le processus $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$ ainsi défini a bien la densité spectrale requise.

Méthode de simulation

On simule les accroissements du mouvement brownien à l'aide de lois normales indépendantes. Puis, soit en discrétisant la solution exacte, soit en écrivant le schéma d'Euler pour l'équation (4.4), on simule $(\xi_x, x \in \mathbb{R}^+)$. Enfin, en multipliant par le vecteur B on obtient la simulation de $(X_x, x \in \mathbb{R}^+)$.

Remarque 4.4.1

Cette méthode de simulation permet de faire du «recollement» de trajectoire en jouant sur la condition initiale de l'équation différentielle considérée. Ce qui n'est pas le cas des autres méthodes.

4.5 Cas champ

Evidemment, on peut se demander comment ceci peut se généraliser à un processus multiparamétré, c'est à dire un champ. On donne ici quelques éléments de réponse. En ce qui concerne la mise en pratique, on se heurte à la taille du problème car elle fait intervenir la discrétisation d'équations aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^d$. Considérons donc les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^d), \\ H &= L^2(\mathbb{R}_+^d), \\ \mathcal{X} &= \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^d), \end{aligned}$$

et la mesure bruit blanc μ_W associée.

Comme on l'a déjà évoqué, on peut définir le mouvement brownien à d paramètres par

$$B_{x_1, \dots, x_d}(\omega) = \langle \omega, \mathbb{I}_{[0, x_1] \times \dots \times [0, x_d]} \rangle$$

et aux sens des distributions on a ([24])

$$W = \frac{\partial^d B}{\partial x_1 \dots \partial x_d}.$$

Pour $(\xi_x, x \in \mathbb{R}_+^d)$ processus du second ordre continu en moyenne quadratique tel que $\int |\lambda|^{2q} M_\xi(d\lambda) < \infty$, ($q \in \mathbb{N}^*$, M_ξ mesure spectrale de $(\xi_x, x \in \mathbb{R}_+^d)$), la dérivation partielle peut s'exprimer simplement. En effet, écrivons la représentation spectrale de $(\xi_x, x \in \mathbb{R}_+^d)$:

$$\xi_x = \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{i(\lambda, x)} Z_\xi(d\lambda)$$

où $(., .)$ est le produit scalaire standard de $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ et Z_ξ le processus spectral associé à $(\xi_x, x \in \mathbb{R}_+^d)$. On peut alors définir la dérivation partielle par (voir par exemple [5])

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \xi_x = \int i\lambda_j e^{i(\lambda, x)} Z_\xi(d\lambda),$$

avec une généralisation simple pour les dérivées d'ordre supérieur.

On est donc amené à considérer des polynômes à plusieurs variables : soit Q un polynôme défini sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients réels de degré q et R un polynôme défini sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients réels de degré r . Si on écrit le système d'équations

$$\begin{cases} Q(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}) \xi_x &= \frac{\partial^d B}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \\ X_x &= R(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}) \xi_x \end{cases}$$

alors on a les relations suivantes entre les densités spectrales :

$$\begin{cases} |Q(i\omega_1, \dots, i\omega_d)|^2 S_\xi(\omega_1, \dots, \omega_d) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \\ |R(i\omega_1, \dots, i\omega_d)|^2 S_\xi(\omega_1, \dots, \omega_d) &= S_X(\omega_1, \dots, \omega_d). \end{cases}$$

Lorsque l'on discrétise les équations aux dérivées partielles ci-dessus, cela fait intervenir des matrices, bien que creuses, de taille très importante (dans le cas d'un schéma aux différences finies, on obtient une matrice de dimension (nombres de points de discrétisation)^d). D'autre part, il est nécessaire de définir des conditions aux bords. Ainsi nous n'avons pas trouvé de schéma de discrétisation raisonnable pour mettre la méthode de markovianisation en pratique dans le cas champ.

5 Simulation utilisant les polynômes d'Hermite

Nous nous sommes inspirés de la décomposition sur le premier chaos de Wiener pour écrire cette méthode de simulation de champ stochastique gaussien stationnaire de densité spectrale donnée. Pour décrire cette méthode, on définit, comme précédemment, dans un premier temps les espaces, puis une famille de fonctions $(\phi_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ et enfin une base de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur laquelle on projette ϕ_x .

5.1 Définition des espaces

Toujours selon la même démarche et les mêmes notations, on pose ici

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} &= \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \\ H &= L^2(\mathbb{R}^d), \\ \mathcal{X} &= \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

et μ_W la mesure bruit blanc associée i.e telle que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu_W(\omega) = e^{-\frac{\|\phi\|_2^2}{2}}$$

(où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme canonique de $L^2(\mathbb{R}^d)$).

5.2 Construction de ϕ

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et ϕ_x la translatée de ϕ :

$$\phi_x(y) = \phi(y - x). \quad (5.1)$$

On définit le champ stochastique gaussien centré unidimensionnel à d paramètres $(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ par

$$X_x = W_{\phi_x}. \quad (5.2)$$

$(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ est complètement caractérisé par la fonction ϕ et on a les formules explicites de sa fonction d'autocorrélation et de sa densité spectrale en fonction de ϕ .

Proposition 5.2.1

– $(X_x = W_{\phi_x}, x \in \mathbb{R}^d)$ est un champ stochastique gaussien centré stationnaire,

- $\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathcal{L}(X_x) = \mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$,
- $R_X(x) = (\phi, \phi_x)_2$.

Preuve

En effet,

$$R_X(x, y) = (\phi_x, \phi_y)_2 \quad (5.3)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z - x) \phi(z - y) dz \quad (5.4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z - (x - y)) \phi(z) dz. \quad (5.5)$$

La fonction d'autocorrélation $R_X(x, y)$ ne dépend donc que de la différence $(x - y)$. Et on a

$$R_X(x - y) \stackrel{\text{déf}}{=} R_X(x, y) \quad (5.6)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z - (x - y)) \phi(z) dz \quad (5.7)$$

$$= (\phi, \phi_{(x-y)})_2. \quad (5.8)$$

□

Remarque 5.2.2

Réciproquement, tout champ gaussien ordinaire $(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ du second ordre centré stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_X \in L^2(\mathbb{R}^d)$ peut s'écrire $X_x = W_{\phi_x}$ où ϕ est solution de l'équation $R_X(x) = (\phi, \phi_x)_2$. Ainsi la fonction ϕ caractérise le champ $(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$.

Proposition 5.2.3

$(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ admet une densité spectrale S_X donnée par la relation

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^d, S_X(\omega) = (2\pi)^{-d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t) e^{-i(\omega, t)} dt \right|^2. \quad (5.9)$$

Preuve

Cela résulte d'une application directe du théorème de Bochner.

□

Soit

$$\psi(\omega) = (2\pi)^{-d/2} \sqrt{S_X(\omega)}, \quad (5.10)$$

ψ est une fonction positive paire.

Supposons de plus que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors

$$R_X(t) = \hat{\psi} * \hat{\psi}(t), \quad (5.11)$$

où $\hat{\psi}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$.

On remarque donc que si l'on note $\phi \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \hat{\psi}$, le champ stochastique $(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ défini par $X_x = W_{\phi_x}$ est le champ gaussien stationnaire centré de densité spectrale S_X .

5.2.1 Une base de $L^2(\mathbb{R}^d)$

On choisit la base de $L^2(\mathbb{R}^d)$ construite à partir des polynômes d'Hermite.

Définition 5.2.4 (Fonctions d'Hermite)

Les fonctions d'Hermite sont les fonctions

$$\xi_n(x) = \pi^{-1/4} ((n-1)!)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_{n-1}(\sqrt{2}x), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.12)$$

où H_{n-1} désigne le $(n-1)$ -ième polynôme d'Hermite.

Propriétés 5.2.5

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \xi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 5.2.6

Considérant un ordre sur $\mathbb{N}^d$ tel que

$$\forall \delta^{(i)} \in \mathbb{N}^d, \quad i < j \Rightarrow \sum_{k=1}^d \delta_k^{(i)} \leq \sum_{k=1}^d \delta_k^{(j)},$$

on définit

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \eta_j \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \xi_{\delta_1^{(j)}} \otimes \cdots \otimes \xi_{\delta_d^{(j)}}. \quad (5.13)$$

Propriété 5.2.7

$(\eta_j)_{j \geq 1}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

5.2.2 Projection

On projette donc ϕ_x sur $(\eta_j)_{j \geq 1}$:

$$\phi_x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j(x) \eta_j, \quad (5.14)$$

la série convergeant en m.q.

Par linéarité et prolongement on a

$$X_x = W_{\phi_x} \quad (5.15)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j(x) W_{\eta_j}, \quad (5.16)$$

(la série convergeant dans $L^2(\mu_W)$).

Remarque 5.2.8

On retrouve ici la décomposition du champ $(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ sur le premier chaos de Wiener.

Méthode de simulation

On simule donc les W_{η_j} qui sont des v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ et on calcule les coefficients $\alpha_j(x)$ en chaque x par la formule:

$$\alpha_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_x(y) \eta_j(y) dy. \quad (5.17)$$

Cette intégrale est calculée numériquement par quadrature de Gauss.

Remarque 5.2.9

Le calcul de ces intégrales peut rendre la méthode inutilisable pour des valeurs du paramètre d élevées. En effet, ces intégrales doivent être calculées en chaque point $x_k \in \mathbb{R}^d$ où l'on souhaite simuler le processus. Il est clair que les méthodes d'intégration numérique par trapèzes sont à proscrire, les points de Gauss étant tout à fait recommandés vu la présence de la fonction d'Hermite η_j dans l'intégrale. Pour des grandes valeurs de d , des méthodes de Monte-Carlo peuvent être envisagées.

6 Méthode spectrale

La méthode spectrale est une méthode de simulation qui s'applique aux processus gaussiens stationnaires centrés admettant une densité spectrale à support compact. Elle est en particulier décrite

dans l'article de Poirion et Soize [53] qui traite du cas général des champs aléatoires définis sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs vectorielles. On peut aussi consulter [11], [25], [71]. Nous nous plaçons ici du point de vue des processus généralisés. On se limite au cas processus pour des commodités d'écriture. La généralisation au cas champ ne pose pas de problème. Suivant toujours la même procédure, on définit dans un premier temps les espaces, puis la famille de fonctions $(\phi_x)_x$ et une base de H sur laquelle on projette ϕ_x .

6.1 Définition des espaces

Soit $T > 0$ et soit Γ le cercle de centre 0 et de longueur T . On note $\mathcal{D}(\Gamma)$ l'espace des fonctions C^∞ sur Γ à valeurs complexes. $\mathcal{D}(\Gamma)$ est un espace nucléaire (cf [21]) et $\mathcal{D}(\Gamma)$ est dense dans $L^2(T)$ espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de période T et de carré intégrable sur $[0, T]$. $L^2(T)$ est bien sûr un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{[0, T]} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Le triplet hilbertien considéré ici est formé par les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{D}(\Gamma), \\ H &= L^2(T), \\ \mathcal{X} &= \mathcal{D}'(\Gamma). \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Minlos, on définit donc μ_W la mesure bruit blanc associée i.e telle que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Gamma)$

$$\int_{\mathcal{D}'(\Gamma)} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu_W(\omega) = e^{-\frac{\|\phi\|_2^2}{2}}$$

(où $\|\phi\|_2^2 = (\phi, \phi)$).

6.2 Construction de ϕ

Soit S_X une fonction densité spectrale à support compact inclus dans $[-\omega_S, \omega_S]$ où ω_S est tel qu'il existe un entier N pour lequel on a l'égalité

$$\frac{\omega_S}{N} = \frac{\pi}{T}.$$

(On se place ainsi dans la suite dans les conditions du théorème d'échantillonnage de Shannon.)

Soit de plus les points répartis de manière symétrique par rapport à 0

$$\begin{cases} \omega_n &= -\omega_S + (n + \frac{1}{2})\Delta_\omega, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{où } \Delta_\omega &= \frac{2\omega_S}{N}. \end{cases}$$

On considère la fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ suivante

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\Delta_\omega} \sqrt{S_X(\omega_n)} \frac{e^{i\omega_n t}}{\sqrt{T}}. \quad (6.1)$$

La fonction translatée

$$\phi_x(y) = \phi(y - x), \quad (6.2)$$

appartient bien à $\mathcal{D}(\Gamma)$ et on définit le processus gaussien $(\tilde{X}_x, x \in \mathbb{R})$ par

$$\tilde{X}_x = W_{\phi_x}. \quad (6.3)$$

De manière analogue à la méthode de simulation précédente, on a la proposition suivante :

Proposition 6.2.1

$(\tilde{X}_x, x \in \mathbb{R})$ ainsi défini est un processus gaussien stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_{\tilde{X}}(x) = (\phi, \phi_x)$.

6.3 Une base de $L^2(T)$

A l'aide des points (ω_n) , on note

$$e_n(t) = \frac{e^{i\omega_n t}}{\sqrt{T}}. \quad (6.4)$$

La famille $(e_n(t))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2(T)$.

On projette ϕ_x sur la base $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\phi_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) e_n, \quad (6.5)$$

où

$$c_n(x) = \int_{[0,T]} \phi_x(t) \overline{e_n(t)} dt \quad (6.6)$$

$$= \sqrt{\Delta_\omega} \sqrt{S_X(\omega_n)} e^{-i\omega_n x}. \quad (6.7)$$

On peut noter que $c_n(x) = 0$ dès que $n \geq N$ ou $n < 0$.

Ce qui permet d'écrire

$$\tilde{X}_x = \sum_{n=0}^{N-1} c_n(x) W_{e_n}, \quad (6.8)$$

où $(W_{e_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille de v.a i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$.

On peut alors calculer aisément la fonction d'autocorrélation de $(\tilde{X}_x, x \in \mathbb{R})$

$$R_{\tilde{X}}(x) = (\phi_x, \phi) \quad (6.9)$$

$$= \int_{[0, T]} \phi(t-x) \overline{\phi(t)} dt \quad (6.10)$$

$$= \Delta_\omega \sum_{n=0}^{N-1} S_X(\omega_n) e^{-i\omega_n x} \quad (6.11)$$

$$= \Delta_\omega \sum_{n=0}^{N-1} S_X(\omega_n) e^{i\omega_n x}, \text{ par parité de } S_X. \quad (6.12)$$

Si on modélise le phénomène physique par un processus gaussien centré stationnaire $(X_x, x \in \mathbb{R})$ de densité spectrale à support compact S_X suffisamment régulière, on va simuler non pas $(X_x, x \in \mathbb{R})$ proprement dit mais le processus stationnaire $(\tilde{X}_x, x \in \mathbb{R})$ ci-dessus. En effet, la fonction d'autocorrélation R_X de $(X_x, x \in \mathbb{R})$ et celle de $(\tilde{X}_x, x \in \mathbb{R})$ sont «proches». Typiquement, si S_X est de classe C^1 , alors il existe une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |R_X(x) - R_{\tilde{X}}(x)| &= \left| \int_{[-\omega_S, \omega_S]} S_X(\omega) e^{i\omega x} d\omega - \Delta_\omega \sum_{n=0}^{N-1} S_X(\omega_n) e^{i\omega_n x} \right| \\ &\leq C \Delta_\omega. \end{aligned}$$

6.4 Simulation numérique

On peut maintenant donner les formules de simulation numérique de $(\tilde{X}_x, x \in \mathbb{R})$. On rappelle qu'une v.a de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ se simule à l'aide de deux v.a U et V indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ par la formule

$$\sqrt{-2 \ln(U)} \operatorname{Re}(e^{i2\pi V}).$$

On considère $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ suites de v.a. i.i.d. $\mathcal{U}(0, 1)$.

On discrétise le domaine spectral $\Omega = [-\omega_s, +\omega_s]$ comme précédemment :

- soit $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de subdivisions,

- soit $\Delta_\omega = 2\omega_s N^{-1}$ le pas de discrétisation fréquentiel,
- soit enfin $\omega_k = -\omega_s + (k + \frac{1}{2})\Delta_\omega$ ($k = 0, \dots, N - 1$) les points de discrétisation (la symétrie par rapport à 0 permet d'exploiter la parité de S_X).

On a supposé de plus que l'on a, entre le domaine temporel et le domaine spectral, la relation

$$T = \frac{2\pi}{\Delta_\omega}, \quad (6.13)$$

et la discrétisation du domaine temporel est donnée par

- $\Delta_t = \frac{\pi}{\omega_s}$ le pas d'échantillonnage dans le domaine temporel,
- $x_k = k\Delta_t$ ($k = 0, \dots, N - 1$) les points d'échantillonnage.

On simule donc $(\tilde{X}_x, x \in \mathbb{R})$ aux points de discrétisation du domaine temporel par la formule

$$\tilde{X}_{x_k} = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\Delta_\omega} e^{-i\omega_n x_k} \sqrt{S_X(\omega_n)} \sqrt{-2 \ln(U_n)} \operatorname{Re}(e^{i2\pi V_n}). \quad (6.14)$$

On retrouve ainsi une formule de simulation de processus (champ) gaussien homogène similaire à celles données dans [53], [11], [25], [71]. Cependant, il faut noter que dans [11], [25], [71], $\sqrt{-2 \ln(U_n)}$ est remplacé par 1 : les formules de simulation obtenues sont alors seulement asymptotiquement gaussiennes.

Remarque 6.4.1

Cette dernière méthode de simulation est l'une des plus utilisée dans le domaine industriel et des bureaux d'études.

7 Cas non stationnaire

On présente ici deux méthodes de simulation de processus stochastique gaussien du second ordre centré non stationnaire dont on se donne la fonction d'autocorrélation. Pour ces deux méthodes, on définit les espaces du triplet hilbertien, la famille de fonctions $(\phi_x)_x$ et la base de l'espace de Hilbert H choisie. Dans la première méthode on utilise la base de Karhunen-Loève, dans la deuxième la base d'ondelettes de Daubechies. On retrouve ainsi les méthodes de simulation exposées dans [68], [71] pour Karhunen-Loève et dans [25], [69] pour les ondelettes.

7.1 Représentation de Karhunen-Loève

7.1.1 Définition des espaces

Soit $T > 0$ et $\mathcal{E}([0, T], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur $[0, T]$ à valeurs réelles. $\mathcal{E}([0, T], \mathbb{R})$ est un espace nucléaire ([46], [21]) dense dans l'espace de Hilbert $L^2([0, T], \mathbb{R})$. On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} &= \mathcal{E}([0, T], \mathbb{R}), \\ H &= L^2([0, T], \mathbb{R}), \\ \mathcal{X} &= \mathcal{E}'([0, T], \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Sur H , on considère le produit scalaire canonique $(f, g) = \int_{[0, T]} f(t)g(t)dt$ et on note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

Il existe une unique mesure de probabilité μ_W sur $\mathcal{B}(\mathcal{E}'([0, T], \mathbb{R}))$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{E}([0, T], \mathbb{R})$

$$\int_{\mathcal{E}'([0, T])} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu_W(\omega) = e^{-\frac{\|\phi\|_2^2}{2}}.$$

7.1.2 Une base de $L^2([0, T], \mathbb{R})$

Soit R_X une fonction d'autocorrélation (i.e. de type positif) définie et continue sur $[0, T] \times [0, T]$.

Proposition 7.1.1

Soit Q défini par

$$(Qf)(x) = \int_{[0, T]} R_X(x, t)f(t)dt. \quad (7.1)$$

Q est un opérateur linéaire continu de $L^2([0, T], \mathbb{R})$ autoadjoint positif de Hilbert-Schmidt. Q possède donc un spectre dénombrable, ses valeurs propres $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une suite décroissante qui tend vers 0 à l'infini et les fonctions propres associées $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ constituent une base orthonormée de $L^2([0, T], \mathbb{R})$.

On peut écrire

$$R_X(x, t) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \lambda_m \psi_m(x) \psi_m(t) \quad (7.2)$$

(où la série est absolument et uniformément convergente dans $[0, T] \times [0, T]$ d'après le théorème de Mercer).

7.1.3 Construction de ϕ_x et simulation

On considère, pour tout $x \in [0, T]$, la fonction

$$\phi_x(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sqrt{\lambda_m} \psi_m(x) \psi_m(t), \quad (7.3)$$

où la série converge dans $L^2([0, T])$ (car $\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \lambda_m = \int_{[0, T]} R_X(x, x) dx < \infty$).

En fait, $\phi_x(t)$ ainsi définie est noyau de l'opérateur $\sqrt{Q}$.

On définit alors le processus stochastique $(X_x, x \in [0, T])$ par

$$X_x = W_{\phi_x}. \quad (7.4)$$

On a bien $\mathbb{E}(X_x X_t) = (\phi_x, \phi_t) = R_X(x, t)$, et

$$X_x = W_{\phi_x} \quad (7.5)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \psi_n(x) W_{\psi_n}, \quad (7.6)$$

où les W_{ψ_n} sont des v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, la série convergeant en m.q. L'algorithme de simulation est alors trivial, il consiste à effectuer des tirages de lois normales indépendantes, puis à construire (7.6).

7.2 Ondelettes

7.2.1 Définition des espaces

On utilise ici le triplet hilbertien déjà évoqué :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ H &= L^2(\mathbb{R}), \\ \mathcal{X} &= \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

On considère sur H le produit scalaire canonique et la mesure bruit blanc associée.

7.2.2 Base d'ondelettes

Soit $M \in \mathbb{N}^*$. On considère les ondelettes de Daubechies

$$\psi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - n + 1) \quad (j, n) \in \mathbb{Z}^2,$$

où ψ est une fonction d'ondelette à support inclus dans $[0, 2M - 1]$ et définie à partir de la fonction d'échelle ϕ par l'équation

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_{k+1} \phi(2x - k),$$

avec

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_{k+1} \phi(2x - k) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1.$$

La famille $(\psi_{j,n})_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

7.2.3 Construction de ϕ_x et simulation

On considère R_X fonction d'autocorrélation définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} R_X(x, x) dx < \infty, \tag{7.7}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} R_X(x, t)^2 dx dt < \infty. \tag{7.8}$$

Comme dans le cas précédent, on définit l'opérateur de Hilbert-Schmidt

$$Qf(x) = \int_{\mathbb{R}} R_X(x, t) f(t) dt \tag{7.9}$$

et on décompose R_X dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ sous la forme

$$R_X(x, t) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \lambda_m \psi_m(x) \psi_m(t) \tag{7.10}$$

(λ_m et ψ_m désignant respectivement les valeurs propres et fonctions propres de Q).

On construit de même la fonction ϕ_x :

$$\phi_x(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sqrt{\lambda_m} \psi_m(x) \psi_m(t) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}). \tag{7.11}$$

À ce stade, on peut faire une méthode de simulation similaire à celle évoquée dans le paragraphe précédent. Cependant, si on projette ψ_m sur la base d'ondelettes $(\psi_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$:

$$\psi_m = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,i,j} \psi_{i,j} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}), \quad (7.12)$$

alors on peut écrire

$$\phi_x(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*, (i,j) \in \mathbb{Z}^2} \sqrt{\lambda_m} \psi_m(x) a_{m,i,j} \psi_{i,j}(t) \quad (7.13)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} b_{i,j}(x) \psi_{i,j}(t). \quad (7.14)$$

De plus dans les articles [25], [69], on fait l'hypothèse que R_X est bien approchée (dans $L^2(\mathbb{R}^2)$) par

$$\widetilde{R}_X(x, t) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} c_{i,j} \psi_{i,j}(x) \psi_{i,j}(t), \quad (7.15)$$

où

$$c_{i,j} = \int_{\mathbb{R}^2} R_X(x, t) \psi_{i,j}(x) \psi_{i,j}(t) dx dt. \quad (7.16)$$

Les coefficients $(c_{i,j})$ sont positifs car R_X est de type positif. Dans ce cas, on peut remplacer les coefficients $b_{i,j}(x)$ dans ϕ_x par $b_{i,j}(x) = \sqrt{c_{i,j}} \psi_{i,j}(x)$.

En effet, si on définit le processus $(X_x, x \in \mathbb{R})$ par

$$X_x = W_{\phi_x} \quad (7.17)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} b_{i,j}(x) W_{\psi_{i,j}} \quad (7.18)$$

(les v.a. $W_{\psi_{i,j}}$ sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$), on a

$$\mathbb{E}(X_x X_t) = (\phi_x, \phi_t)_2 \quad (7.19)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} c_{i,j} \psi_{i,j}(x) \psi_{i,j}(t) \quad (7.20)$$

$$= \widetilde{R}_X(x, t). \quad (7.21)$$

II SIMULATION DE PROCESSUS ET CHAMPS STOCHASTIQUES NON GAUSSIENS : ETAT DES LIEUX

Nous exposons ici les différentes méthodes de modélisation et simulation de processus (champs) stochastiques non gaussiens du second ordre strictement stationnaires, de moments ou de loi marginale et de fonction d'autocorrélation (ou densité spectrale) fixés, rencontrées dans divers articles émanant souvent de revues à caractère ingénieur. Aussi, le souci de rigueur mathématique dans ces publications n'est pas toujours prééminent. Il nous a cependant semblé important de citer ces méthodes pour leur pertinence, leurs idées (qui ont pu nous inspirer) et par le fait qu'elles sont parfois utilisées en pratique.

1 Modélisation d'un processus non gaussien strictement stationnaire par un processus de Poisson filtré

La classe des processus de Poisson filtrés fournit des modèles de phénomènes aléatoires ayant des caractéristiques non gaussiennes. Dans l'article [50], Poirion propose d'utiliser ce type de modèle pour simuler des champs stochastiques à valeurs vectorielles strictement stationnaires de moments fixés et de densité spectrale donnée. Par ailleurs, dans cet article, cette méthode de simulation est illustrée par une application à l'étude de la réponse d'un avion soumis à la turbulence atmosphérique verticale. Pour plus de clarté, on décrit ci-après la méthode dans le cas d'un processus à

valeurs scalaires. On pourra trouver les propriétés des processus de Poisson filtrés dans le livre de Parzen [45].

Le processus $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ que l'on cherche à simuler est du second ordre, centré, strictement stationnaire, admettant une densité spectrale S_X à support compact et des moments $M_{X,\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, K, K > 0$).

1.1 Principe

En réalité, un cas particulier de processus de Poisson filtré est utilisé:

Définition 1.1.1

Soit $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus de Poisson et $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ses temps de saut. Soit une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. et indépendantes de $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$. On définit $(\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ processus de Poisson filtré par

$$\tilde{X}_t = \sum_{n=1}^{N(t)} F(t - \tau_n) Y_n. \quad (1.1)$$

Remarque 1.1.2

$(\tilde{X}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ ainsi défini est asymptotiquement stationnaire (convergence en loi).

Soit γ le paramètre du processus de Poisson $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$. On impose à la suite $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la condition $\mathbb{E}(Y_1^2) = \frac{2\pi}{\gamma}$. Le but est de déterminer $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$, F et Y_1 tels que le processus $(\tilde{X}_{t+u}, t \in \mathbb{R}^+)$ converge en loi lorsque $u \rightarrow +\infty$ vers le processus $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$.

Remarque 1.1.3

Dans toute la suite la fonction F considérée sera supposée à support $\mathbb{R}^+$.

Le résultat précédent implique la relation

$$S_X(\omega) = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} F(t) dt \right|^2.$$

1.2 Simulation

1.2.1 Détermination de $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$, F et Y_1

i. Soit H fonction telle que

$$S_X(\omega) = |H(\omega)|^2.$$

On pose donc

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} H(\omega) d\omega .$$

En ajoutant l'hypothèse que S_X est à support compact, la fonction F ainsi obtenue est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$ (cf [50]). Il est d'autre part nécessaire que la fonction h définie par $h(i\omega) = H(\omega)$ vérifie la condition de Paley-Wiener (voir p.25) de manière à ce que F soit à support $\mathbb{R}^+$.

- ii. En notant $w_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$, on a $\tau_n = \sum_{i=1}^n w_i$ où $(w_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre γ . τ_n se simule donc aisément.
- iii. En ce qui concerne Y_1 , remarquons tout d'abord que les cumulants de X et les moments de Y_1 sont liés par l'équation (avec des notations évidentes)

$$K_{X,\alpha} = \gamma \left[\int_{\mathbb{R}} F(s)^\alpha ds \right] M_{Y_1,\alpha} . \quad (1.2)$$

On obtient donc les valeurs $M_{Y_1,\alpha}$ pour $\alpha = 1, \dots, K$ (les cumulants $K_{X,\alpha}$ se calculent à l'aide des moments $M_{X,\alpha}$). Sous certaines conditions, il est possible de générer Y_1 possédant ces moments (cf [12], voir le problème des moments).

Remarque 1.2.1

L'équation (1.2) implique que les cumulants d'ordre pair $K_{X,2\alpha}$ doivent nécessairement être strictement positifs. Ce qui limite singulièrement le domaine d'application de cette méthode.

1.2.2 Simulation numérique

De manière pragmatique, on est donc amené à discrétiser les domaines spectral et temporel et à tronquer la série définissant $\tilde{X}_t$. De façon à vérifier les hypothèses du théorème d'échantillonnage de Shannon, on discrétise les domaines spectral et temporel de la manière suivante :

- soit $\Omega = [-\omega_s, \omega_s]$ le domaine spectral (la densité spectrale S_X est supposée bornée à support inclus dans Ω),
- soit $\Delta_t = \frac{\pi}{\omega_s}$ le pas de discrétisation temporel,
- soit $t_\alpha = \alpha \Delta_t$ les points d'échantillonnage,
- soit $M \in \mathbb{N}^*$ et $T = M \Delta_t$ où $[0, T]$ est le domaine temporel.

On choisit $\gamma = \frac{1}{\Delta_t}$ pour paramètre du processus de Poisson $(N_t, t \in \mathbb{R}^+)$. Ce choix est justifié dans [50] par le fait que si $\gamma \neq \frac{1}{\Delta_t}$ alors la suite de v.a. $(X_T^M)_M$ (définie par l'égalité ci-dessous) tend p.s. vers 0 lorsque $M \rightarrow +\infty$.

Concrètement on calcule donc

$$X_t^M = \sum_{n=1}^M F(t - \tau_n) Y_n \quad (1.3)$$

aux points t_α pour $\alpha = 0, \dots, M - 1$.

X_t^M défini par (1.3) constitue une suite approchante du processus de Poisson filtré $\tilde{X}_t$. En effet (cf [50]),

$$\forall t, \quad X_t^M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \tilde{X}_t. \quad (1.4)$$

2 Méthode d'inversion pour les processus non gaussiens strictement stationnaires

Cette méthode est décrite dans [20], [55], [75]. Une variante de cette méthode a par exemple été implémentée dans [41] pour simuler des turbulences non gaussiennes (dûes à la complexité du terrain) en vue de simuler les forces aérodynamiques sur un rotor d'éolienne.

Le processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$ considéré est un processus centré, du second ordre, strictement stationnaire, admettant une densité spectrale S_X à support compact. $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est supposé non gaussien. Il est supposé de plus que l'on connaît F_B la fonction de répartition de X_t (F_B ne dépend pas de t par stationnarité).

2.1 Principe

Dans un premier temps un processus gaussien est simulé par la méthode spectrale. Ce processus ainsi obtenu est ensuite transformé (transformation non linéaire) en un processus non gaussien.

Appliquant la méthode spectrale, soit $(X_G^N(t), t \in \mathbb{R})$ processus tel que

$$X_G^N(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{N-1} H(\omega_k) \exp(i\psi_k + it\omega_k) \right),$$

où $|H(\omega)|^2 = S_X(\omega)$, $(\psi_k)_k$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et Δ_ω est le pas de discrétisation du domaine spectral (même discrétisation que celle vue p.35 : en particulier Δ_ω est choisi de la forme $\Delta_\omega = 2\omega_s/N$).

Soit $X_G(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} X_G^N(t)$ (limite en m.q.) et soit F_G la fonction de répartition de $X_G(t)$.

$X_G^N(t)$ est transformé de la manière suivante : soit

$$X_B^N(t) = F_B^{-1} [F_G(X_G^N(t))] , \quad (2.1)$$

où l'on a noté F_B^{-1} la fonction inverse (ou inverse généralisée si l'inverse n'est pas définie) de F_B . Il faut remarquer que l'évaluation de F_B^{-1} peut poser problème.

Remarques 2.1.1

- $X_B(t)$ a F_B pour fonction de répartition.
- Soit $X_B(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} X_B^N(t)$ et S_B sa densité spectrale. La transformation dans (2.1) étant non linéaire, S_B ne coïncide pas avec S_X . Aussi des itérations sont effectuées de manière à avoir S_B « proche » de S_X .

2.2 Schéma itératif

En vue d'approcher la densité spectrale voulue, Yamazaki et Shinozuka (dans [75], puis repris ensuite dans [55] et [20]) proposent le schéma itératif suivant.

On pose

$$S_G^{(1)}(\omega) = S_X(\omega) .$$

On utilise la méthode spectrale

$$\begin{aligned} S_G^{(i)} &\rightsquigarrow (X_G^N)^{(i)}(t) , \\ \text{On pose } (X_B^N)^{(i)}(t) &= F_B^{-1} [F_G((X_G^N)^{(i)}(t))] , \end{aligned}$$

On « estime » $S_B^{(i)}(\omega)$.

Si $S_B^{(i)} \approx S_X$ (pour la distance L^2 par exemple), on s'arrête.

Sinon on pose

$$S_G^{(i+1)}(\omega) = S_G^{(i)}(\omega) \frac{S_X(\omega)}{S_B^{(i)}(\omega)} ,$$

et on recommence ($i := i + 1$).

Remarque 2.2.1

Aucun résultat de convergence n'est donné. Seuls des exemples numériques illustrent cette méthode.

3 Simulation de processus non gaussiens non stationnaires

S'inspirant de la décomposition en chaos de Wiener, Sakamoto et Ghanem proposent dans [61] d'utiliser une projection sur la base des polynômes d'Hermite, et la représentation de Karhunen-Loève d'un processus gaussien non stationnaire sous-jacent, pour simuler un processus non gaussien non stationnaire dont on connaît la fonction d'autocorrélation et la loi marginale d'ordre 1 à chaque instant t .

3.1 Projection sur la base des polynômes d'Hermite

Soit $(X_t, t \in \mathbb{R})$ processus du second ordre non gaussien centré de fonction d'autocorrélation $R_X(t, t')$ dont on connaît les lois $\mathcal{L}(X_t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dans un premier temps, la méthode consiste à calculer les coefficients $(\alpha_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ de la projection de X_t sur les polynômes d'Hermite (base de $L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt)$)

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(t) H_i(G_t), \quad (3.1)$$

où

- i. H_i est le i -ème polynôme d'Hermite,
- ii. pour chaque t , G_t est une v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$,
- iii. $\alpha_i(t) = \frac{\mathbb{E}(X_t H_i(G_t))}{\sqrt{i!}}$,

la série convergeant en m.q.

Remarque 3.1.1

Sakamoto et Ghanem ne font pas d'hypothèses supplémentaires pour justifier la légitimité de ce développement. D'autre part, ces auteurs calculent (à t fixés) les coefficients $\alpha_i(t)$ par une méthode de Monte-Carlo, en utilisant le même générateur de loi uniforme pour simuler (par inversion) la loi de X_t et la loi de G_t ce qui impose une corrélation arbitraire entre ces deux v.a.

3.2 Calcul de la fonction d'autocorrélation du processus gaussien sous-jacent

Un processus gaussien $(G_t, t \in \mathbb{R})$ apparaissant dans ce modèle, il faut déterminer sa fonction d'autocorrélation R_G . L'équation (3.1) implique (à l'aide de la formule de Mehler et de l'orthogonalité des polynômes d'Hermite) la relation suivante entre les fonctions d'autocorrélation

$$R_X(t, t') = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(t) \alpha_i(t') i! R_G(t, t')^i. \quad (3.2)$$

En tronquant la série et discrétisant le domaine temporel, Sakamoto et Ghanem obtiennent un système d'équations non linéaires à résoudre.

Remarque 3.2.1

Outre la difficulté de résolution, il faut s'assurer que l'on obtient une fonction R_G semi-définie positive (i.e une fonction d'autocorrélation). L'article [61] n'est pas explicite sur ces points.

3.3 Simulation du processus non gaussien via la représentation de Karhunen-Loève

Une fois la fonction R_G déterminée, on écrit le développement de Karhunen-Loève pour le processus gaussien $(G_t, t \in \mathbb{R})$: notant (λ_i) , (f_i) les valeurs propres et fonctions propres associées de l'opérateur R_G et (ξ_i) v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$G_t = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(t) \xi_i. \quad (3.3)$$

Substituant à G_t cette série dans (3.1), Sakamoto et Ghanem obtiennent un nouveau développement pour X_t

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(t) \psi_i, \quad (3.4)$$

où

- i. ψ_i désigne un polynôme en les v.a. (ξ_i) ("chaos polynômial"),

ii. notant p l'ordre de ψ_i , les coefficients (β_i) sont de la forme

$$\beta_i(t) = \frac{p!}{\mathbb{E}(\psi_i^2)} \alpha_i(t) \prod_{j=1}^p \sqrt{\lambda_{k(j)}} f_{k(j)}(t),$$

les indices $k(j)$ désignent ceux qui apparaissent dans la liste d'indices des (ξ_i) dans le chaos polynomial ψ_i .

III SIMULATION DE PROCESSUS ET CHAMPS STOCHASTIQUES NON GAUSSIENS À L'AIDE DES POLYNÔMES D'HERMITE

Le problème de simulation des processus gaussiens est un problème bien posé, les processus gaussiens étant totalement caractérisés par la donnée de leur moyenne et de leur fonction d'autocorrélation. D'autre part, comme nous l'avons vu dans la première partie, les méthodes sont multiples et efficaces. Dans le cas général, le problème de simulation des processus est mal posé. Nous ne disposons forcément que d'une caractérisation partielle du processus à simuler. Les données ici sont la loi marginale d'ordre 1 (ou les premiers moments) et la fonction d'autocorrélation sous une hypothèse de stationnarité. Dans la partie précédente, nous avons vu que les méthodes de simulation existantes sont soit limitées par des hypothèses fortes sur les moments (c'est le cas du modèle de Poisson filtré) soit mal justifiées sur le plan mathématique. Notre but est donc de construire un modèle assez général pour répondre aux caractéristiques souhaitées (tout en restant conscient de la multiplicité des processus solutions du problème).

Nous exposons dans un premier temps les données du problème et la méthode de simulation envisagée. Dans le chapitre 2 sont décrites les techniques de simulation effectives des trajectoires. Enfin des exemples illustrent la méthode, les estimateurs utilisés afin de vérifier la qualité de la simulation étant décrits au chapitre 3.

1 Description de la méthode

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les polynômes de Hermite sont définis par (voir annexe C pour plus de détails):

$$H_0(x) = 1, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.1)$$

1.1 Données

Le but est de simuler les trajectoires d'un processus non gaussien strictement stationnaire dont les données statistiques sont les suivantes :

Cas 1 (N premiers moments de la loi marginale d'ordre 1 et fonction d'autocorrélation)
on se donne

- $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ ($N > 1$) des réels qui sont les N premiers moments d'une v.a.

On supposera dans la suite $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$.

- $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ telle que
 - i. $R(0) = 1$,
 - ii. R est semi-définie positive (cf. définition A.2.1).

Cas 2 (loi marginale d'ordre 1 et fonction d'autocorrélation)
on se donne

- une fonction de répartition F_Y d'une v.a. Y , avec $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. On supposera dans la suite $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) = 1$.
- $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ telle que
 - i. $R(0) = 1$,
 - ii. R est semi-définie positive.

Les méthodes de simulation de processus gaussiens étant connues, l'idée est de considérer une transformation non linéaire d'un processus gaussien pour simuler un processus non gaussien. De plus la famille $\left((\sqrt{n!})^{-1} H_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ constitue une base orthonormale de $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)$. Il est donc naturel de construire un processus strictement stationnaire $(Y_t, t \in \mathbb{R}^+)$ défini par la relation

$$Y_t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n(G_t) \quad (1.2)$$

où

- H_n est le n -ième polynôme d'Hermite,
- $(G_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est un processus gaussien stationnaire standard (i.e. pour tout t fixé, G_t suit une loi normale centrée réduite),

tel que

- soit $\mathbb{E}(Y_t^n) = \mu_n \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$, (cas 1)

- ou pour tout t fixé, les v.a. Y_t et Y ont même loi, (cas 2)

et tel que

- la fonction d'autocorrélation R_Y de $(Y_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est proche de R dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

1.2 Loi de Y_t

Dans le cas 2, la loi de Y_t est donnée par la loi de Y . Pour le cas 1, seul un nombre fini de moments est imposé. L'idée est alors de choisir une v.a. Y possédant ces moments. D'autre part, comme on le verra par la suite, notre but est de déterminer la fonction de répartition «inverse», notée F_Y^{-1} , de cette v.a. Y . Dans la partie V, nous exposons un critère de choix fondé sur le principe de maximum d'entropie. Cette méthode fait appel à des techniques d'optimisation sous contraintes. Elle permet de déterminer une densité de loi de probabilité possédant les moments requis. Le calcul de la fonction de répartition inverse se fait alors numériquement.

1.3 Utilisation des polynômes d'Hermite

Dans ce qui suit, la fonction F_Y désigne soit la fonction de répartition de la v.a. Y décrite précédemment pour le cas 1, soit la donnée elle-même dans le cas 2.

L'inverse (généralisé) de la fonction de répartition F_Y est définie par

$$F_Y^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F_Y(x) \geq y\} \quad (1.3)$$

(où $\inf(\emptyset) = +\infty$). La fonction de répartition de la v.a. $F_Y^{-1}(U)$, où U est une v.a. uniforme sur $[0, 1]$, est F_Y . Si G est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et F_G sa fonction de répartition, $F_G(G)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Donc la fonction de répartition de la v.a. $F_Y^{-1} \circ F_G(G)$ est F_Y . Considérons donc l'hypothèse suivante :

$$F_Y^{-1} \circ F_G \in L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx\right). \quad (1.4)$$

Si cette hypothèse est vraie, alors la fonction $F_Y^{-1} \circ F_G$ peut être projetée sur la base

$$\left(\left(\sqrt{n!} \right)^{-1} H_n \right)_{n \in \mathbb{N}} :$$

il existe une suite de réels $(f_n)_n$ tels que

$$F_Y^{-1} \circ F_G = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_n \quad (1.5)$$

où

$$f_n = (n!)^{-1} \int_{\mathbb{R}} F_Y^{-1} \circ F_G(x) H_n(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad (1.6)$$

la série étant convergente dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)$.

Remarque 1.3.1

La v.a. Y est de carré intégrable donc

$$F_Y^{-1} \circ F_G \in L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx\right).$$

En effet, comme la v.a. $F_Y^{-1} \circ F_G(G)$ a même loi que la v.a. Y ,

$$\int_{\mathbb{R}} [F_Y^{-1} \circ F_G(x)]^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \mathbb{E}((F_Y^{-1} \circ F_G(G))^2) \quad (1.7)$$

$$= \mathbb{E}(Y^2). \quad (1.8)$$

Proposition 1.3.2

Soit $(G_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus stationnaire gaussien standard.

Alors le processus $(Y_t, t \in \mathbb{R}^+)$ défini par

$$Y_t = F_Y^{-1} \circ F_G(G_t), \quad (1.9)$$

est strictement stationnaire, et

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{E}(Y_t^n) = \mu_n. \quad (1.10)$$

Preuve

Comme il a été remarqué plus haut, $Y_t = F_Y^{-1} \circ F_G(G_t)$ a F_Y pour fonction de répartition et a donc $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ pour N premiers moments. $\square$

2 Techniques de simulation

On expose ici deux méthodes effectives de simulation de trajectoires non gaussiennes. L'ingrédient commun de ces deux méthodes est la simulation d'un processus stationnaire gaussien, laquelle est effectuée par deux méthodes différentes :

la méthode spectrale ([53]) et la méthode de markovianisation ([31], [4]).

La première étape est de générer un processus stationnaire gaussien $(G_t, t \in \mathbb{R}^+)$ de loi marginale $\mathcal{N}(0, 1)$ et de fonction d'autocorrélation R_G . Elle se concentre donc en particulier sur la détermination de la fonction R_G . La seconde étape est de générer le processus aléatoire $(Y_t^M, t \in \mathbb{R}^+)$ donné par $Y_t^M = \sum_{n=1}^M f_n H_n(G_t)$ (M est fixé a priori), où les coefficients (f_n) sont obtenus soit par intégration numérique (1.6) soit par Monte-Carlo (1.2).

2.1 Détermination de R_G

A l'aide de la formule de Mehler (cf. annexe), on obtient une relation entre R_Y et R_G .

$$R_Y(t) = \mathbb{E}(Y_{t+s} Y_s) \quad (2.1)$$

$$= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n(G_{t+s}) \sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n(G_s) \right) \quad (2.2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \mathbb{E}(H_n(G_{t+s}) H_n(G_s)) \quad (2.3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 (n!) [R_G(t)]^n. \quad (2.4)$$

Considérons donc la série entière

$$\phi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 (n!) Z^n.$$

Remarquons en particulier que $\phi(0) = 0$ car Y est centré, et que le rayon de convergence de cette série est non nul puisque $\sum_{n=1}^{\infty} (n!) f_n^2 = 1 < \infty$. Ainsi ϕ admet une fonction réciproque développable en série entière au voisinage de 0 sous la seule condition que $\phi'(0)$ soit non nul, ce qui est équivalent à $f_1 \neq 0$. Les coefficients de la série entière réciproque se calculent de manière analytique, par récurrence, en fonction des coefficients $f_n^2 (n!)$ (cf. [7] par exemple).

Dans ces conditions et si $R_Y(t)$ appartient au domaine de convergence de la série entière réciproque, on a

$$R_G(t) = \phi^{-1}(R_Y(t)).$$

Ainsi, si on connaît les f_n , on est capable sous certaines conditions de déterminer $R_G(t)$. Cependant, ceci n'est pas utilisable en pratique. En effet, d'une part il s'agit d'inversion locale et d'autre part rien ne garantit la semi-définie positivité de la fonction R_G .

Aussi, pour contourner ces difficultés, nous nous contentons de trouver une fonction semi-définie positive R_G qui minimise la quantité

$$\|R - R_M\|_{L^2(\mathbb{R}, dt)} = \left\| R - \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 (R_G)^n \right\|_{L^2(\mathbb{R}, dt)}. \quad (2.5)$$

La contrainte semi-définie positive pour la fonction d'autocorrélation rend le problème de minimisation difficile. Aussi elle peut être remplacée par une contrainte plus simple via le théorème de Bochner et la densité spectrale. En effet, notant S_G la fonction densité spectrale de $(G_t, t \in \mathbb{R}^+)$ (en supposant que cette densité spectrale existe), le problème devient : minimiser la quantité

$$\|R - R_M\|_{L^2(\mathbb{R}, dt)} = \left\| R - \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 \left(\int_{\mathbb{R}} S_G(\omega) e^{i\omega \cdot} d\omega \right)^n \right\|_{L^2(\mathbb{R}, dt)}, \quad (2.6)$$

sous les contraintes suivantes :

- S_G positive,
- S_G paire,
- $\int_{\mathbb{R}} S_G(\omega) d\omega = 1$.

2.2 Détermination de la fonction d'autocorrélation pour la méthode spectrale

La minimisation est effectuée après discrétisation des intégrales à l'aide d'un algorithme stochastique d'optimisation globale (voir [14]) :

$$\min_{\sigma_k \geq 0} \sum_l \left(R(t_l) - \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 \left(\Delta_\omega \sum_k \sigma_k e^{i\omega_k t_l} \right)^n \right)^2 \quad (2.7)$$

La solution $(\sigma_k)_k$ est obtenue en utilisant par exemple un algorithme de recuit simulé. La complexité du problème et le caractère global de l'optimisation justifient l'emploi d'un tel algorithme d'optimisation stochastique. La densité spectrale est alors approchée par la fonction :

$$S_G(\omega) = \sum_k \sigma_k \mathbb{I}_{[\omega_k, \omega_{k+1}]}(\omega)$$

La méthode spectrale est utilisée pour simuler le processus gaussien stationnaire $(G_t, t \in \mathbb{R}^+)$. Enfin le processus $(Y_t^M = \sum_{n=1}^M f_n H_n(G_t), t \in \mathbb{R}^+)$ est simulé.

2.3 Détermination de la fonction d'autocorrélation pour la méthode de markovianisation

L'avantage d'utiliser la méthode de markovianisation réside dans le fait que le problème de minimisation est de dimension beaucoup plus petite que le précédent (voir cependant la comparaison entre les deux méthodes dans le chapitre 4 sur les expériences numériques). L'hypothèse suivante est nécessaire : supposons que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln(S_G(\omega))}{1 + \omega^2} d\omega > -\infty.$$

Alors cela implique qu'il existe $H \in H^+(\mathbb{C})$ (espace de Hardy) tel que ([31], [4])

$$S_G(\omega) = |H(i\omega)|^2. \quad (2.8)$$

La fonction $H(i\omega)$ ([31], [4], [47]) est soit une fonction rationnelle soit peut être approchée par une fonction rationnelle de la forme :

$$\frac{\Phi(i\omega)}{\Psi(i\omega)} \quad (2.9)$$

où

- Φ, Ψ sont des polynômes à coefficients réels (Ψ unitaire),
- $\deg \Phi < \deg \Psi$,
- les racines de Ψ sont dans $\{\text{Ré}(z) < 0\}$.

Le but est de minimiser la quantité

$$\left\| R - \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\Phi(i\omega)}{\Psi(i\omega)} \right|^2 e^{i\omega \cdot} d\omega \right)^n \right\|_{L^2(\mathbb{R}, dt)}, \quad (2.10)$$

par rapport aux coefficients $(\phi_k)_{k=0}^{\deg \Phi}$ et $(\Psi_k)_{k=0}^{\deg \Psi}$ des polynômes Φ et Ψ (respectivement), sous les contraintes que Φ et Ψ soient comme ci-dessus.

Remarque 2.3.1

La dimension de ce nouveau problème de minimisation est égal au nombre de coefficients de Φ et Ψ (par exemple dans les applications numériques, on a choisi $\deg(\Phi) = 2$ et $\deg(\Psi) = 4$, ce qui donne 8 coefficients à déterminer, voir p.68) tandis que la dimension du problème de minimisation précédent est égal au nombre de points utilisés pour calculer les intégrales dans (2.7).

Une fois que les polynômes Φ et Ψ sont déterminés, il ne reste plus qu'à simuler le processus gaussien sous-jacent par la méthode décrite ci-après. Soit $(\xi_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{\deg \Psi}$, qui est solution de l'équation différentielle de Itô

$$d\xi_t - A\xi_t dt = dZ_t, \quad (2.11)$$

où

- A est la matrice compagnon du polynôme Ψ ,
- $dZ_t = (0, \dots, 0, dW_t)^T$, et W_t est un processus de Wiener standard.

Plusieurs schémas existent pour construire une solution $(\xi(0) = \xi_0; \xi_t, t \in \mathbb{R}^+)$ ([72, 3]).

Soit $(G_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus scalaire défini par

$$G_t = B\xi_t, \quad (2.12)$$

où

$$B = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{\deg \Phi}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{\deg \Psi}. \quad (2.13)$$

Alors $(G_t, t \in \mathbb{R})$ est un processus gaussien dont la mesure spectrale a une densité donnée par $\left| \frac{\Phi(i\omega)}{\Psi(i\omega)} \right|^2$.

Comme dans la méthode précédente, la simulation du processus non gaussien Y_t est obtenue en construisant la somme

$$Y_t^M = \sum_{n=1}^M f_n H_n(G_t). \quad (2.14)$$

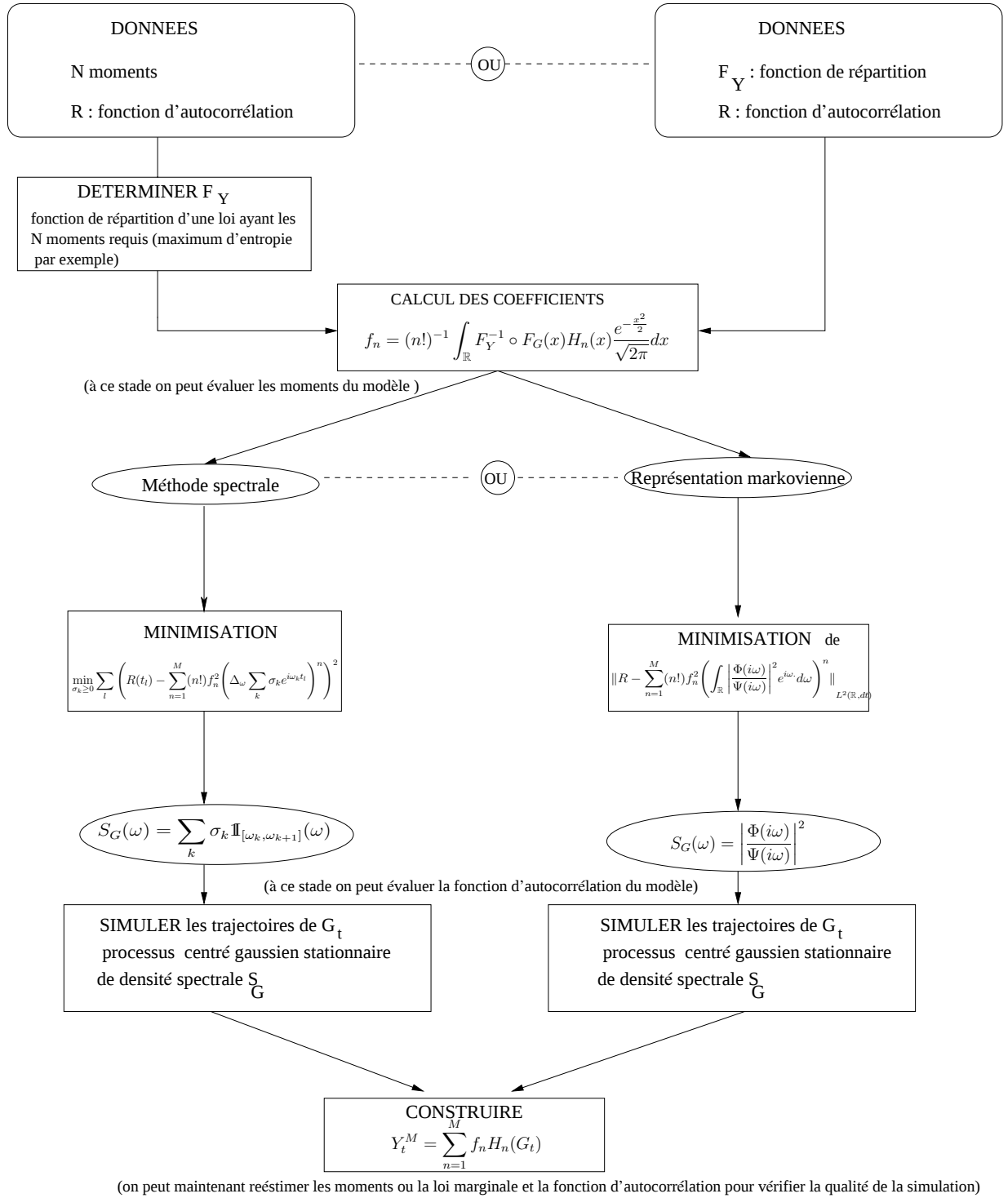


FIG. 2.1 – *diagramme résumant les principales étapes de la méthode de simulation du processus non gaussien*

3 Estimation

Dans les applications numériques, il est utile d'estimer les moments et la densité spectrale du processus simulé afin de rendre compte de la qualité de la simulation. Nous exposons ici les méthodes d'estimation (dans le cadre des processus) que nous avons utilisées dans les exemples. Nous nous sommes en grande partie inspiré de [68] pour ce chapitre.

3.1 Ergodicité

Soit $(X_t, t \in \mathbb{R})$ processus du second ordre strictement stationnaire.

Soit $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ et $Y_t = (X_t, X_{t+t_1}, \dots, X_{t+t_n})$.

Soit f fonction mesurable telle que le processus $(f(Y_t), t \in \mathbb{R})$ soit du second ordre.

Définition 3.1.1

Le processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est dit *ergodique* si pour tous $(t_1, \dots, t_n)$ et f comme ci-dessus,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t) dt - \mathbb{E}(f(Y_t)) \right|^2 \right) = 0. \quad (3.1)$$

Proposition 3.1.2 (Cas d'un processus gaussien, [68])

Si $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est un processus gaussien centré stationnaire dont la fonction d'autocorrélation R_X vérifie $R_X \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est un processus ergodique.

3.2 Estimation

3.2.1 Ergodicité du modèle

Dans le cas qui nous intéresse, le processus simulé est obtenu par transformation d'un processus gaussien centré stationnaire :

$$Y_t = F_Y^{-1} \circ F_G(G_t).$$

Si on suppose que le processus $(G_t, t \in \mathbb{R})$ a une fonction d'autocorrélation $R_G \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, d'après le paragraphe précédent, si $(G_t, t \in \mathbb{R})$ est ergodique alors le processus $(Y_t, t \in \mathbb{R})$ est ergodique.

3.2.2 Estimation des moments

Soit $[(Y_t^{(i)}, t \in \mathbb{R})]_{i=1}^{N_{sim}}$, N_{sim} versions indépendantes du processus $(Y_t, t \in \mathbb{R})$. La formule d'estimation choisie pour les moments de $(Y_t, t \in \mathbb{R})$ est

$$\hat{\mu}_k^{(T)} = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \frac{1}{T} \int_0^T \left(Y_t^{(i)}\right)^k dt, \text{ pour } k \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.2)$$

On note $\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(Y_t^k)$. D'après ce qui précède et si le processus $(Y_t^k, t \in \mathbb{R})$ est du second ordre, grâce à la propriété d'ergodicité du modèle, on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}_k^{(T)} = \mu_k \text{ (limite en m.q.)}. \quad (3.3)$$

Cependant, le temps «d'acquisition» T est en général fixé dans les applications numériques et c'est plutôt la convergence lorsque $N_{sim} \rightarrow \infty$ (loi des grands nombres) qui est prise en compte.

D'autre part, ces estimateurs sont sans biais :

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_k^{(T)} - \mu_k) = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}((Y_t^{(i)})^k) dt - \mu_k \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \frac{1}{T} \times T \times \mu_k - \mu_k \quad (3.5)$$

$$= 0. \quad (3.6)$$

Enfin, précisons que, en pratique, les formules numériques d'estimation des moments sont de la forme (où α désigne l'aléa)

$$\hat{\mu}_k^{(T, N_{sim})}(\alpha) = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \frac{1}{N_{pt}} \sum_{j=1}^{N_{pt}} \left(Y_{j \frac{T}{N_{pt}}}^{(i)}(\alpha)\right)^k, \text{ pour } k \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.7)$$

et qu'une relation de récurrence numériquement stable peut être écrite :

$$\hat{\mu}_k^{(T, N_{sim})}(\alpha) = \frac{1}{N_{sim}} \frac{1}{N_{pt}} \sum_{j=1}^{N_{pt}} \left(Y_{j \frac{T}{N_{pt}}}^{(N_{sim})}(\alpha)\right)^k + \frac{N_{sim} - 1}{N_{sim}} \hat{\mu}_k^{(T, N_{sim}-1)}(\alpha) \quad (3.8)$$

3.2.3 Estimation de la densité spectrale

On considère la fenêtre temporelle naturelle $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}} \mathbb{1}_{[0, T]}(t)$. L'estimateur de densité spectrale choisi (méthode du périodogramme) s'écrit

$$\hat{S}_{N_{sim}, T}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N_{sim}} \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{N_{sim}} \left| \int_0^T Y_t^{(l)} e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (3.9)$$

Cet estimateur est biaisé, en effet

$$\mathbb{E}(\hat{S}_{N_{sim},T}(\omega)) = (S_Y * G_T)(\omega), \quad (3.10)$$

où

$$G_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (3.11)$$

$$= \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2, \quad (3.12)$$

mais cet estimateur est asymptotiquement sans biais :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{S}_{N_{sim},T}(\omega)) = S_Y(\omega), \quad (3.13)$$

(voir [68] pour les démonstrations).

En pratique le calcul de l'estimateur de densité spectrale fait intervenir, comme dans le paragraphe précédent, la discrétisation de l'intégrale avec l'atout ici de pouvoir utiliser un algorithme de transformation de Fourier rapide.

4 Expériences numériques

Pour illustrer les techniques de simulation énoncées précédemment, nous avons testé la méthode proposée sur quelques exemples de lois marginales, moments et densités spectrales.

4.1 Simulation via la méthode spectrale

4.1.1 Premier exemple de densité spectrale

On se donne pour densité spectrale

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{100}{270} \frac{1 + 0.6558\omega^2}{(1 + 0.2459\omega^2)^{11/6}}.$$

Il s'agit d'un spectre de Von Karman, couramment utilisé dans les modèles de turbulence atmosphérique et figurant en particulier dans [47].

On note R la fonction d'autocorrélation associée.

4.1.2 Cas 1 : seuls les moments sont fixés

On impose 4 moments

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2, \mu_4 = 9.$$

Ce choix de moments garantit évidemment le caractère non gaussien du processus à simuler.

Il s'agit donc dans un premier temps de déterminer par le principe de maximum d'entropie (cf partie V) une loi possédant ces moments. Pour cela, on peut se référer à [43] pour un algorithme (ainsi qu'un programme). De plus, à l'adresse

[http : //www.brauer.informatik.tu – muenchen.de/ ormoneit/lambda_table.txt](http://www.brauer.informatik.tu-muenchen.de/ormoneit/lambda_table.txt) sont disponibles de nombreux résultats numériques. La densité de la loi obtenue s'écrit

$$p(y) = e^{-\lambda_0 - 1} \exp\left(-\sum_{k=1}^4 \lambda_k y^k\right),$$

avec les valeurs

λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
-0.3179	0.840332	0.915891	-0.393295	0.0424441

Le calcul de $F_Y^{-1} \circ F_G$ se fait numériquement et les coefficients $f_n = \frac{1}{n!} \mathbb{E}(F_Y^{-1} \circ F_G(G) H_n(G))$ (où G v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$) sont obtenus par Monte-Carlo (200000 tirages). Si l'on décide de tronquer la série à l'ordre 4, ce qui revient à considérer le modèle $Y_t^M = \sum_{k=1}^4 f_k H_k(G_t)$, les moments obtenus par intégration numérique (quadrature de Gauss) sont les suivants

moments	ordre 1	ordre 2	ordre 3	ordre 4
	0.00	0.99	1.97	10.26

Ce qui n'est pas très satisfaisant, tandis qu'en tronquant à l'ordre 5, on obtient les moments

moments	ordre 1	ordre 2	ordre 3	ordre 4
	0.00	1.00	1.95	9.08

On considère donc le modèle $Y_t^M = \sum_{k=1}^5 f_k H_k(G_t)$.

Le domaine spectral choisi est $\Omega = [-50, 50]$ rad/s, discrétisé en 1024 points. Le domaine temporel est choisi et discrétisé de manière à vérifier les hypothèses du théorème d'échantillonnage de Shannon (voir annexe B).

La densité spectrale S_G du processus gaussien sous-jacent $(G_t, t \in \mathbb{R})$ est déterminée par le problème de minimisation

$$\min_{\sigma_k \geq 0} \sum_l \left(R(t_l) - \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 \left(\Delta_\omega \sum_k \sigma_k e^{i\omega_k t_l} \right)^n \right)^2. \quad (4.1)$$

La solution $(\sigma_k)_k$ est obtenue en utilisant un algorithme de recuit simulé (Boltzmann) initialisé en $\sigma_k = S(\omega_k)$. Il y a donc ici 1024 paramètres à déterminer (en fait $1024/2=512$ en utilisant la parité de la densité spectrale). D'autre part, un algorithme de transformation de Fourier rapide est utilisé.

La densité spectrale considérée pour le processus gaussien sous-jacent est alors

$$S_G(\omega) = \sum_k \sigma_k \mathbb{I}_{[\omega_k, \omega_{k+1}]}(\omega)$$

et la méthode spectrale est utilisée pour simuler les trajectoires de $(G_t, t \in \mathbb{R})$. Avec 1000 simulations, nous avons réestimé la densité spectrale du processus simulé $(Y_t^M, t \in \mathbb{R})$ ainsi que ses moments pour les comparer aux données initiales et vérifier ainsi la qualité de la simulation :

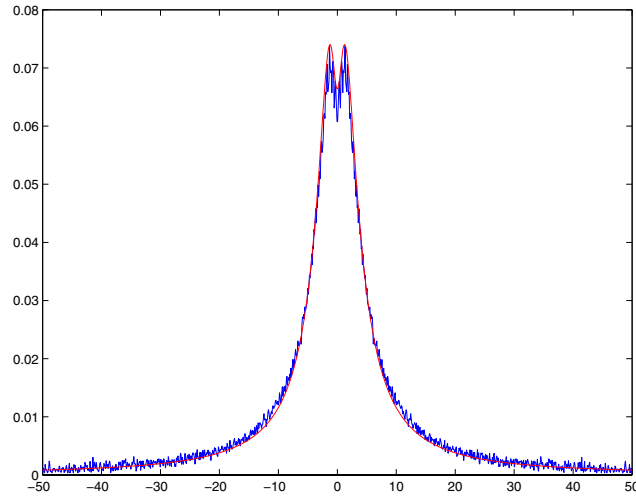


FIG. 4.1 – comparaison de la densité spectrale cible et simulée

Moment	théorique	simulé
ordre 1	0.00	0.00
ordre 2	1.00	1.00
ordre 3	2.00	1.94
ordre 4	9.00	9.04

TAB. 4.1 – *Moments théoriques et moments du processus simulé*

Les valeurs estimées des moments du processus simulé sont données à 10^{-2} près. Ceci est pertinent car les intervalles de confiance approchés à 95% (calculés numériquement) sont de diamètres strictement inférieurs à 10^{-2} .

Comme l'illustrent la figure et le tableau, les comparaisons sont très bonnes. À titre de remarque, se trouve ci-après une illustration de la convergence des estimateurs des moments d'ordre 2, 3 et 4 en fonction du nombre de tirages :

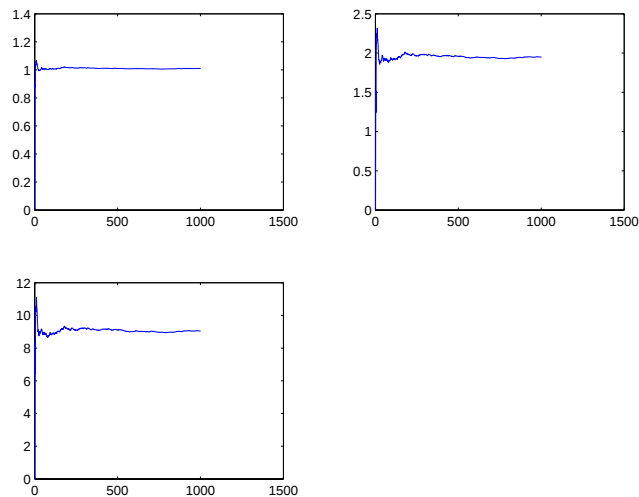


FIG. 4.2 – *convergence des estimateurs des moments d'ordre 2, 3 et 4*

4.1.3 Cas 2 : loi marginale imposée

Loi exponentielle

On choisit d'imposer pour la loi marginale la loi exponentielle de paramètre 1 recentrée. On peut facilement calculer la fonction de répartition inverse :

$$F_Y^{-1}(y) = -1 - \ln(1 - y).$$

La v.a.

$$F_Y^{-1} \circ F_G(G) = -1 - \ln(1 - F_G(G))$$

a F_Y pour fonction de répartition (par symétrie, la v.a. $-1 - \ln(F_G(G))$ a aussi F_Y pour fonction de répartition). Ceci posé, on peut calculer les coefficients f_n par intégration numérique :

$$f_n = (n!)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (-1 - \ln(1 - F_G(x))) H_n(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Comme précédemment on tronque la série à l'ordre 5. Le même domaine spectral, ainsi que les mêmes nombre de points de discrétisation et nombre de tirages que dans le paragraphe précédent ont été utilisés. Nous avons réestimé la densité spectrale du processus simulé $(Y_t^M, t \in \mathbb{R})$ ainsi que sa loi marginale d'ordre 1 pour les comparer aux données initiales et vérifier ainsi la qualité de la simulation. Nous avons ainsi tracé sur le même schéma l'histogramme de la loi exponentielle recentrée (simulée par la méthode d'inversion) et celui de la loi marginale du processus simulé pour le même nombre de tirages. Là encore les comparaisons entre les différentes quantités sont très satisfaisantes.

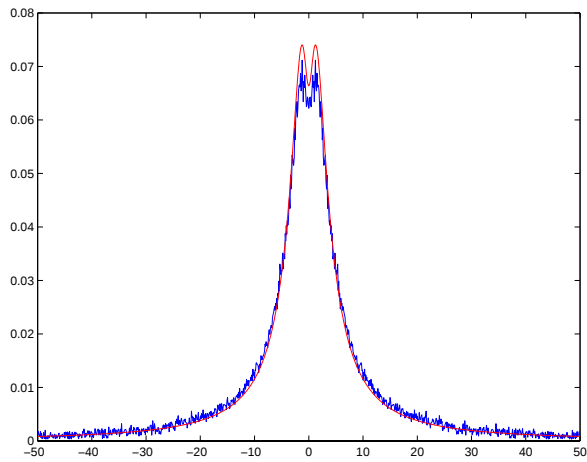


FIG. 4.3 – comparaison de la densité spectrale cible et simulée

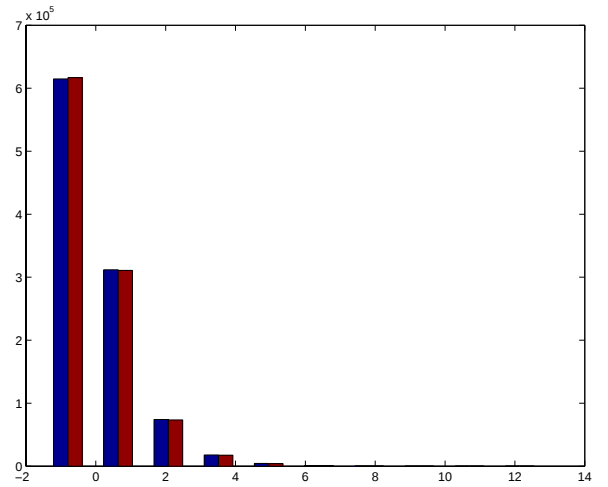


FIG. 4.4 – comparaison de la loi cible et simulée

Loi de Pareto

Si l'on considère la loi de Pareto de paramètres (1,4), c'est à dire la loi de densité $f(x) = \frac{1}{x^5} \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$ que l'on recentre et renormalise, on obtient la fonction de répartition inverse :

$$F_Y^{-1}(y) = \frac{3(1-y)^{-1/4} - 4}{\sqrt{2}}. \quad (4.2)$$

En imposant ceci pour loi marginale, les résultats obtenus ne sont plus très satisfaisants :

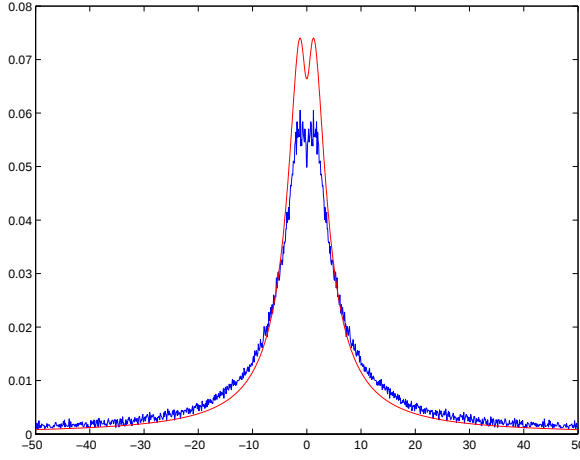


FIG. 4.5 – *comparaison de la densité spectrale cible et simulée*

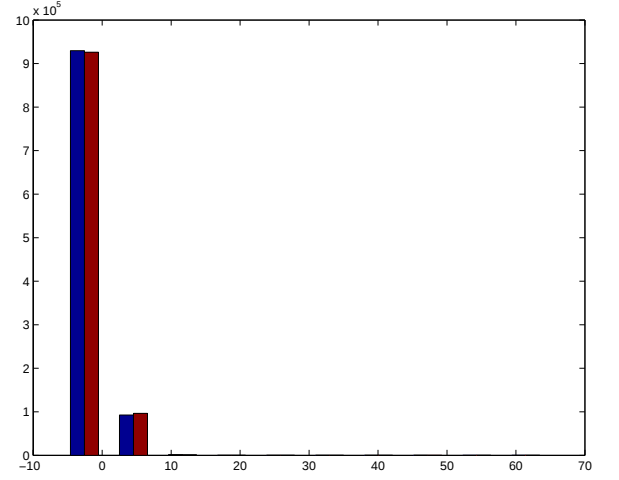


FIG. 4.6 – *comparaison de la loi cible et simulée*

La comparaison des spectres n'étant pas bonne, on en déduit que le problème de minimisation n'a pas donné une réponse satisfaisante. Nous verrons plus loin que par le biais de la markovianisation (et donc un problème de minimisation différent) nous obtenons de bien meilleurs résultats.

4.1.4 Deuxième exemple de densité spectrale

Afin de tester notre algorithme, nous l'avons mis en oeuvre sur un autre exemple de densité spectrale ainsi que d'autres valeurs de moments et une autre loi marginale. On peut voir dans ce qui suit que les résultats sont de nouveau satisfaisants.

On se donne pour densité spectrale

$$S(\omega) = \frac{e^{5/4}}{|\omega|^5} \exp\left(-\frac{5}{4\omega^4}\right).$$

Cette forme de spectre est souvent utilisée dans les modèles de houle (spectre de Pierson-Moskowitz) et ce spectre est notamment utilisé dans [70] .

4.1.5 Cas 1

On impose 4 moments

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \mu_4 = 4.$$

Les valeurs des coefficients λ_k intervenant dans la loi du maximum d'entropie sont

λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
-0.1081	0.744447	0.519957	-0.32643	0.058711

En tronquant à l'ordre 4, le modèle $Y_t = \sum_{k=1}^4 f_k H_k(G_t)$ a pour moments (calculés par intégration numérique)

moments	ordre 1	ordre 2	ordre 3	ordre 4
	0.00	1.00	0.98	4.01

Enfin, on obtient les résultats suivants :

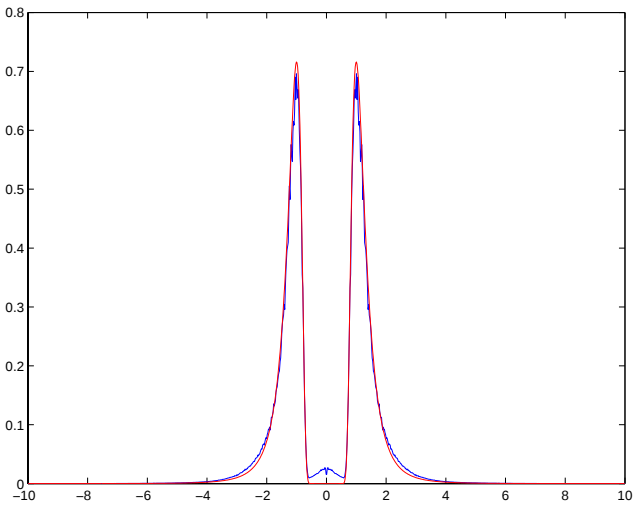


FIG. 4.7 – *comparaison de la densité spectrale cible et simulée*

Moment	théorique	simulé
ordre 1	0.00	0.00
ordre 2	1.00	0.99
ordre 3	1.00	0.97
ordre 4	4.00	3.92

TAB. 4.2 – *Moments théoriques et moments du processus simulé*

4.1.6 Cas 2

On prend pour loi marginale une loi de Rayleigh de paramètre 1 recentrée et renormalisée. La fonction de répartition inverse est

$$F_Y^{-1}(y) = \frac{\sqrt{-2 \ln(1-y)} - \sqrt{\pi/2}}{\sqrt{2 - \pi/2}}.$$

On tronque le développement d'Hermite à l'ordre 5. On obtient les résultats suivants :

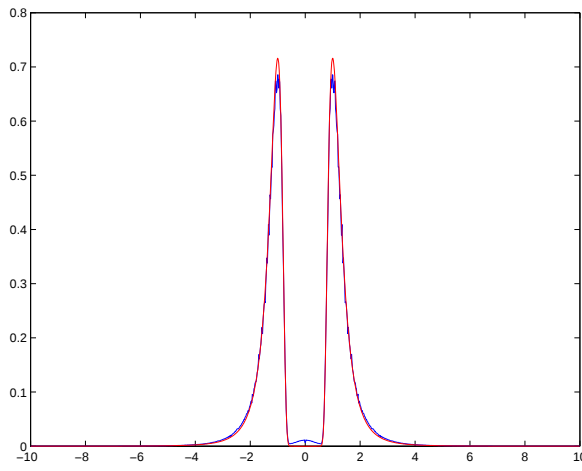


FIG. 4.8 – comparaison de la densité spectrale cible et simulée

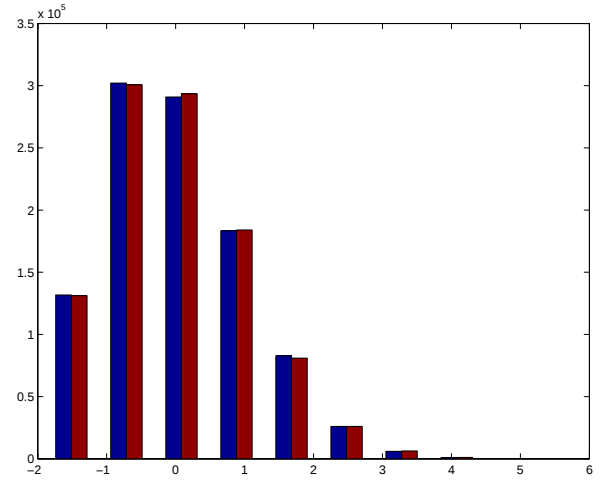


FIG. 4.9 – comparaison de la loi cible et simulée

4.2 Simulation via la markovianisation

Sur les mêmes exemples, nous avons aussi utilisé la méthode de réalisation markovienne pour simuler le processus gaussien sous-jacent. Les seules différences avec ce qui précède, en ce qui concerne la technique de simulation du processus non gaussien, se situent au niveau du problème de minimisation et de technique de simulation gaussienne. Afin de se placer sous les hypothèses relatives à la réalisation markovienne de dimension finie, soient Φ et Ψ de la forme suivante :

$$\Phi(x) = (\alpha_1 + \beta_1 x)(\alpha_2 + \beta_2 x),$$

$$\Psi(x) = (x^2 + 2\gamma_1\delta_1 x + \delta_1^2)(x^2 + 2\gamma_2\delta_2 x + \delta_2^2),$$

où $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ et $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ sont des réels strictement positifs. On cherche alors à déterminer les 8 coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ qui minimisent la quantité

$$\sum_l \left(R(t_l) - \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 \left(\Delta_\omega \sum_k \left| \frac{\Phi(i\omega_k)}{\Psi(i\omega_k)} \right|^2 e^{i\omega_k t_l} \right)^n \right)^2. \quad (4.3)$$

Bien que ce problème de minimisation soit de taille nettement plus petite que le précédent (8 paramètres à déterminer contre 512 précédemment) et contre ce qui était attendu, la minimisation n'en est pas pour autant plus rapide. Ceci est sans doute dû à deux points : premièrement, il n'est pas possible d'utiliser un algorithme de transformation de Fourier rapide, et en second lieu nous n'avons aucune idée de la valeur des coefficients des polynômes Φ et Ψ tandis que dans la méthode spectrale en partant de $\sigma_k = S(\omega_k)$ l'expérience montre que l'on est déjà près de la solution...

Voici les résultats obtenus sur les mêmes données de densités spectrales, moments et lois marginales que précédemment. La qualité de ces résultats est globalement comparable à celle obtenue dans le paragraphe précédent.

4.2.1 Densité spectrale de type Von Karman, Cas 1

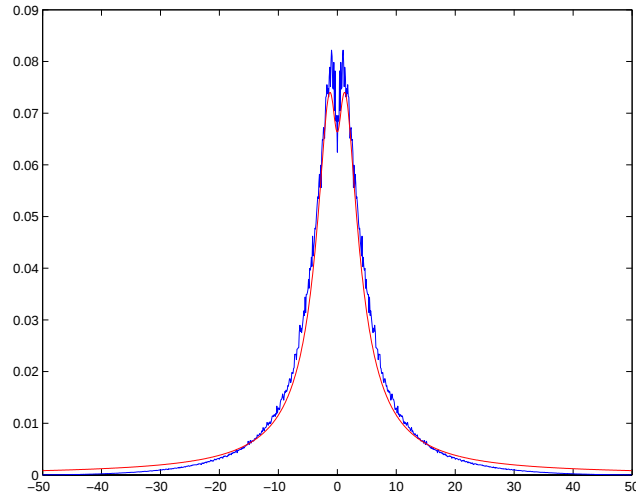


FIG. 4.10 – comparaison de la densité spectrale cible et simulée

Moment	théorique	simulé
ordre 1	0.00	0.00
ordre 2	1.00	1.01
ordre 3	2.00	1.95
ordre 4	9.00	8.98

TAB. 4.3 – Moments théoriques et moments du processus simulé

4.2.2 Densité spectrale de type Von Karman, Cas 2

Loi exponentielle

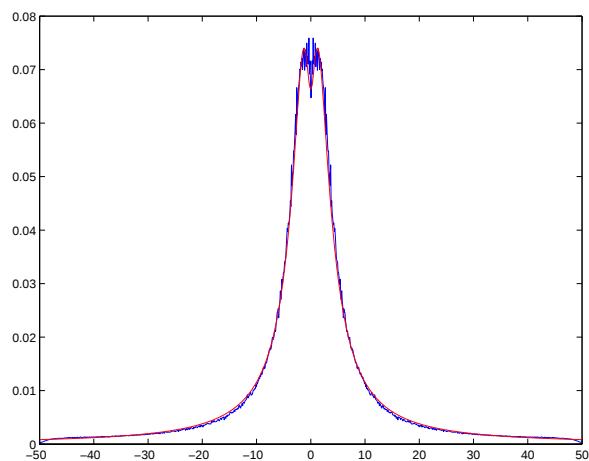


FIG. 4.11 – comparaison de la densité spectrale cible et simulée

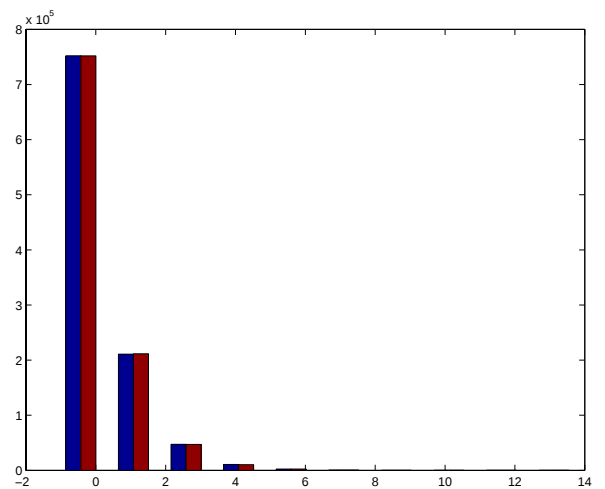


FIG. 4.12 – comparaison de la loi cible et simulée

Loi de Pareto

Alors que l'utilisation de la méthode spectrale ne donnait pas de résultats satisfaisants dans ce cas, les résultats obtenus via la réalisation markovienne sont nettement meilleurs :

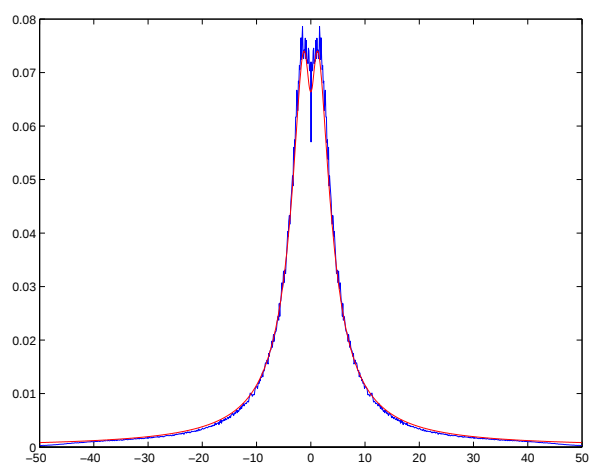


FIG. 4.13 – *comparaison de la densité spectrale cible et simulée*

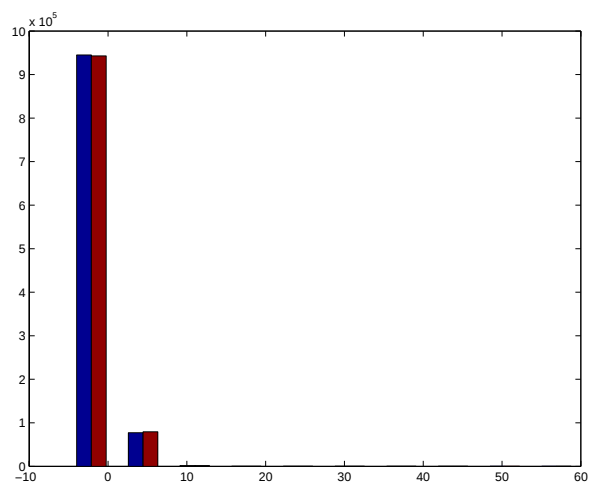


FIG. 4.14 – *comparaison de la loi cible et simulée*

4.2.3 Densité spectrale de type Pierson-Moskowitz, Cas 1

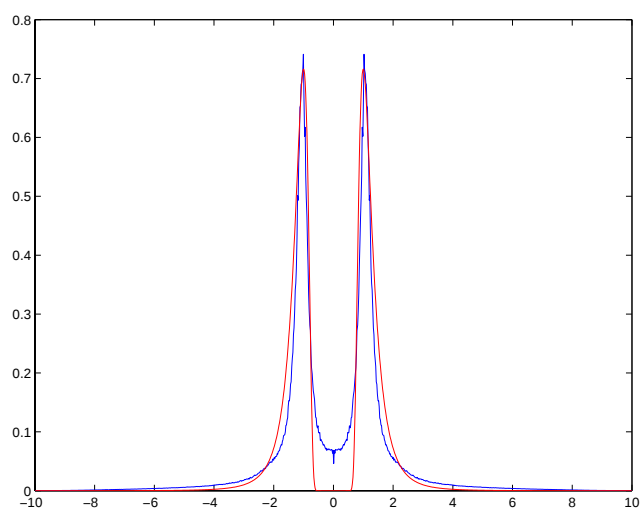


FIG. 4.15 – *comparaison de la densité spectrale cible et simulée*

Moment	théorique	simulé
ordre 1	0.00	0.00
ordre 2	1.00	0.99
ordre 3	1.00	0.96
ordre 4	4.00	3.89

TAB. 4.4 – Moments théoriques et moments du processus simulé

4.2.4 Densité spectrale de type Pierson-Moskowitz, Cas 2

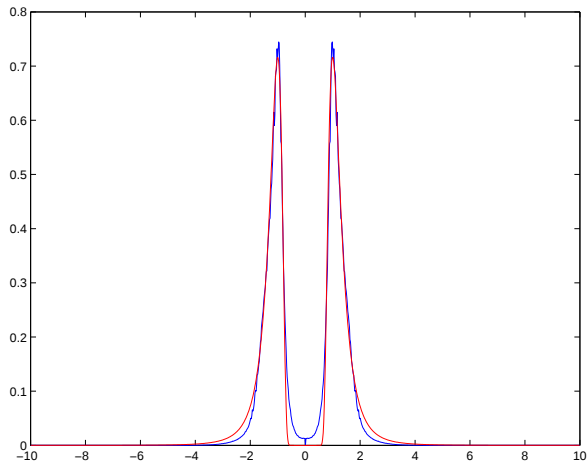


FIG. 4.16 – comparaison de la densité spectrale cible et simulée

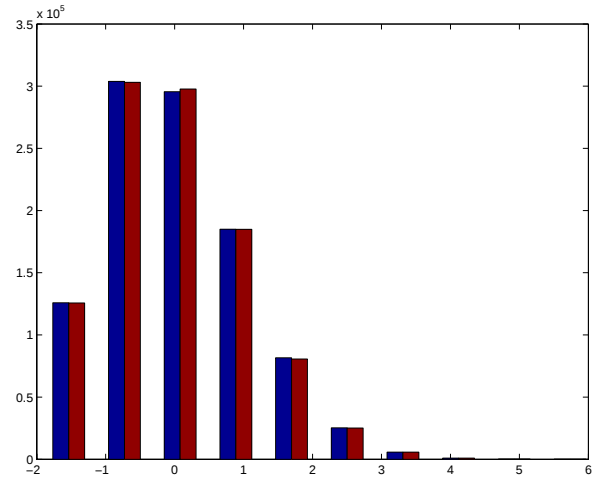


FIG. 4.17 – comparaison de la loi cible et simulée

4.3 Cas d'un champ scalaire

Sur les exemples qui suivent, nous avons étendu la méthode au cas des champs stochastiques indexés par $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On reprend les mêmes moments et lois marginales ci-avant. Les coefficients f_n sont donc déjà calculés et seul l'aspect détermination de la densité spectrale du champ gaussien sous-jacent a été examiné. Pour la simulation du champ gaussien, on ne peut utiliser que la méthode spectrale, la technique de réalisation markovienne n'étant pas adaptée, comme cela a déjà été évoqué, au cas des champs.

4.3.1 Premier exemple de densité spectrale

On se donne pour densité spectrale le produit

$$S(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{100}{270} \frac{1 + 0.6558\omega_1^2}{(1 + 0.2459\omega_1^2)^{11/6}} \times \frac{1}{2\pi} \frac{100}{270} \frac{1 + 0.6558\omega_2^2}{(1 + 0.2459\omega_2^2)^{11/6}}.$$

Précisons que ce n'est évidemment pas en simulant deux processus indépendants que l'on obtient la simulation d'un champ possédant cette densité spectrale. Le domaine spectral considéré est $\Omega = [-50; 50] \times [-50; 50]$, discrétisé en 128×128 points (on ne peut pas faire plus pour des raisons de taille de calcul) et 1000 simulations sont réalisées pour les estimations.

4.3.2 Cas 1 : moments fixés

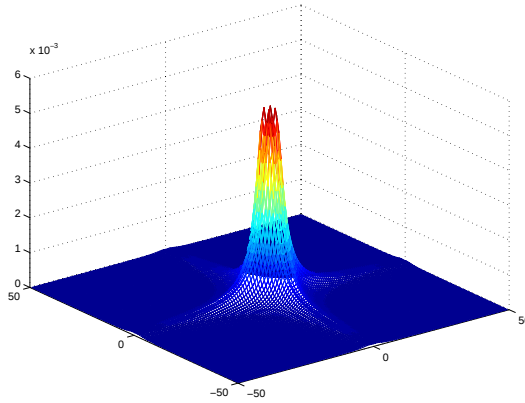


FIG. 4.18 – densité spectrale cible

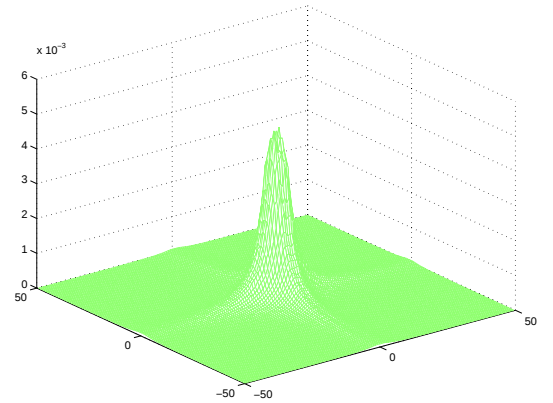


FIG. 4.19 – densité spectrale simulée

Moment	théorique	simulé
ordre 1	0.00	0.00
ordre 2	1.00	1.00
ordre 3	2.00	1.95
ordre 4	9.00	9.11

TAB. 4.5 – Moments théoriques et moments du champ simulé

4.3.3 Cas 2 : loi marginale imposée

La loi marginale choisie est la loi exponentielle recentrée et normalisée.

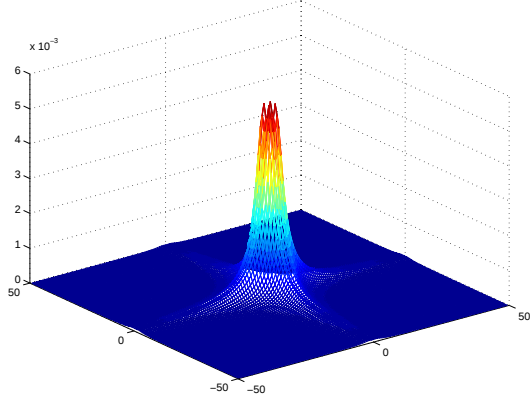


FIG. 4.20 – *densité spectrale cible*

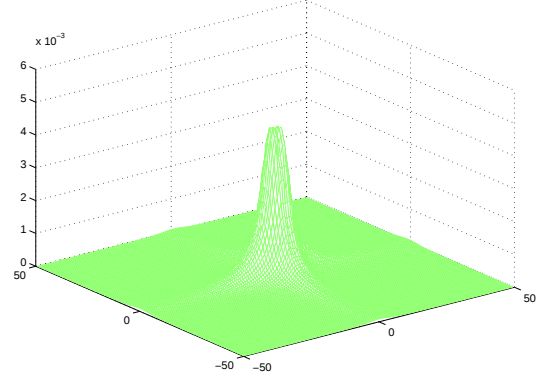


FIG. 4.21 – *densité spectrale simulée*

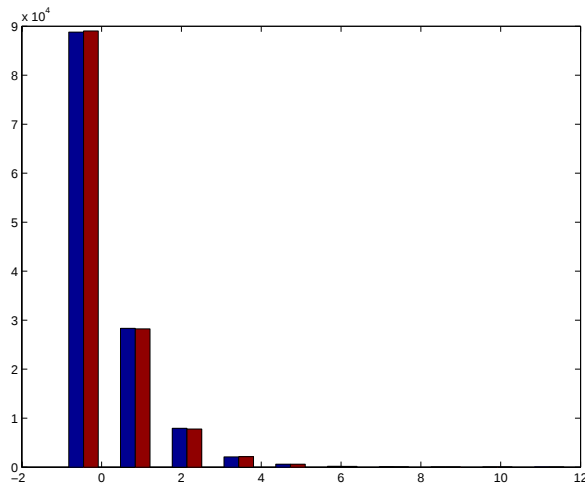


FIG. 4.22 – *comparaison de la loi cible et simulée*

4.3.4 Deuxième exemple de densité spectrale

Voici un autre spectre relevé dans [48] utilisé pour un modèle de turbulence.

$$S(\omega_1, \omega_2) = -\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{.5^4(1 + 2\sqrt{\omega_1 + \omega_2})^{17/6}} \left(\frac{\omega_1^2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} - 1 \right) \mathbb{I}_{\Omega}(\omega_1, \omega_2).$$

Le domaine spectral considéré dans [48] est $\Omega = [-.5; .5] \times [-.5; .5]$. Les nombres de points de discrétisation et de simulations sont les mêmes que précédemment.

4.3.5 Cas 1 : moments fixés

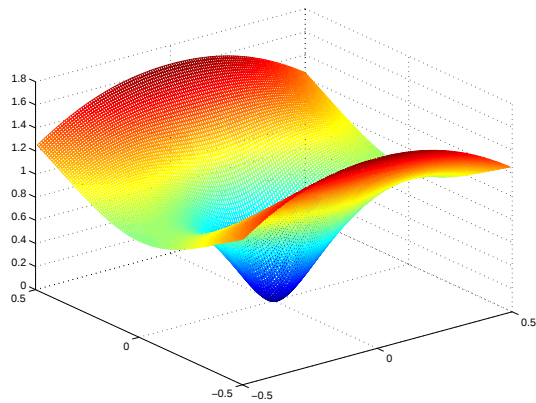


FIG. 4.23 – *densité spectrale cible*

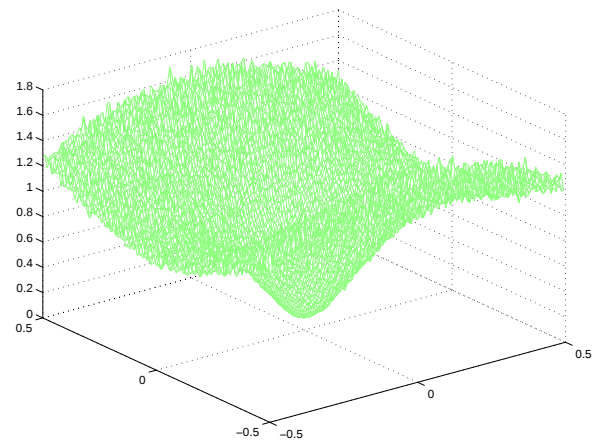


FIG. 4.24 – *densité spectrale simulée*

Moment	théorique	simulé
ordre 1	0.00	0.00
ordre 2	1.00	1.02
ordre 3	1.00	1.02
ordre 4	4.00	4.18

TAB. 4.6 – *Moments théoriques et moments du champ simulé*

4.3.6 Cas 2 : loi marginale imposée

La loi marginale utilisée ici est la loi de Rayleigh recentrée et normalisée.

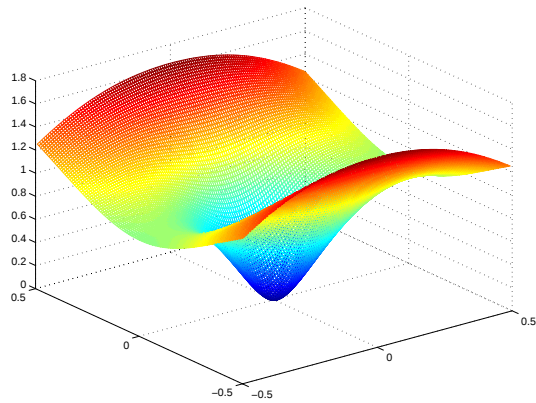


FIG. 4.25 – *densité spectrale cible*

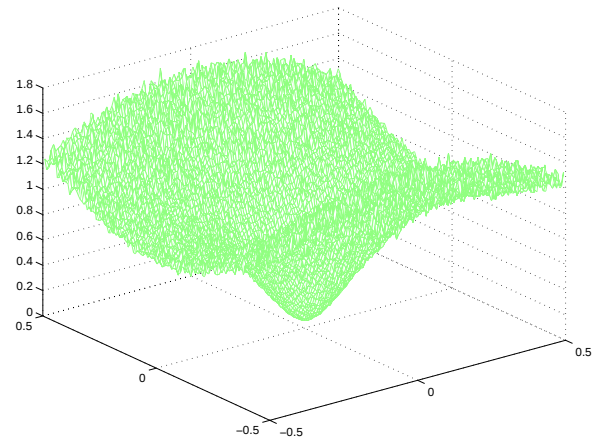


FIG. 4.26 – *densité spectrale simulée*

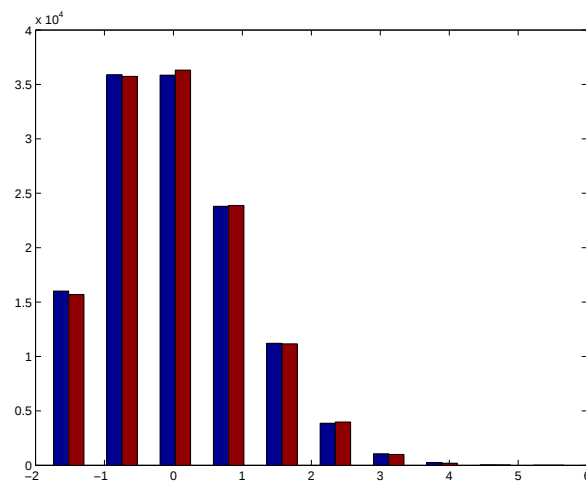


FIG. 4.27 – *comparaison de la loi cible et simulée*

4.4 Commentaires

La partie optimisation est le point délicat de la méthode et la réestimation du spectre permet de vérifier la validité de la solution du problème de minimisation. Pour cette minimisation, nous avons utilisé un algorithme de recuit simulé de type Boltzmann. Nous aurions pu aussi envisager un algorithme génétique. L'inconvénient majeur de ces algorithmes stochastiques est qu'ils sont assez difficiles à «régler» (pour le recuit simulé : température initiale, définition du refroidissement et du

voisinage...). D'autre part, le temps de convergence peut être assez long et l'on est parfois amené à stopper l'algorithme avant d'avoir obtenu un résultat optimal. Cependant, il n'est pas possible d'utiliser ici un algorithme d'optimisation déterministe vu la complexité des problèmes posés et le souhait d'obtenir un minimum global.

On peut remarquer dans les exemples que la loi marginale est toujours très bien réestimée. Cela est tout à fait normal puisque, par construction, nous approchons $F_Y^{-1} \circ F_G(G_t)$ (v.a. qui a la loi requise) en moyenne quadratique.

Les temps de calculs sont en général courts car nous avons fait le choix de fixer le temps de calcul pour le recuit simulé. Enfin, nous nous sommes heurtés au problème du volume des calculs : dans le cas des champs nous n'avons pas pu aller au delà de 128×128 points de discrétisation pour le domaine spectral.

IV ÉTUDE DE LA SÉRIE

Le modèle construit fait donc intervenir une somme finie de polynômes d'Hermite appliqués à un processus gaussien. Nous étudions dans cette partie les convergences à t fixé du modèle. Des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour la convergence presque sûre et pour obtenir une évaluation de l'erreur commise sur la fonction d'autocorrélation. C'est pourquoi une classe de processus vérifiant ces hypothèses est mise en exergue. On vérifie par ailleurs que les exemples traités dans la partie précédente appartiennent à cette classe. Dans le dernier chapitre est évoqué le cas des processus non stationnaires. En effet, une extension du modèle dans ce cadre peut être envisagée, le problème étant de savoir quelles données on peut s'imposer en pratique en ce qui concerne les moments ou les lois marginales.

1 Résultats de convergence

Gardant les notations de la partie précédente, soit $(Y_t^M)_M$ la suite définie par

$$Y_t^M = \sum_{n=1}^M f_n H_n(G_t). \quad (1.1)$$

Notre but est d'étudier la convergence de la suite $(Y_t^M)_M$ vers Y_t quand $M \rightarrow \infty$.

1.1 Convergence en moyenne quadratique

Proposition 1.1.1

La suite $(Y_t^M)_{M \in \mathbb{N}^}$ converge uniformément en t vers Y_t dans $L^2(\Omega, A, \mathbb{P})$.*

Preuve

Par le théorème de transfert, les coefficients $(f_n)_n$ sont donnés par

$$f_n = (n!)^{-1} \mathbb{E}(Y_t H_n(G_t)) \quad (1.2)$$

$$= (n!)^{-1} \mathbb{E}(F_Y^{-1} \circ F_G(G_t) \cdot H_n(G_t)). \quad (1.3)$$

($f_0 = 0$)

Comme G_t est stationnaire, f_n ne dépend pas de t . Donc pour tout t fixé, on a

$$\begin{aligned} Y_t &= F_Y^{-1} \circ F_G(G_t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n(G_t) \end{aligned}$$

dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. □

Nous allons prouver maintenant que la fonction d'autocorrélation de la série tronquée converge vers la fonction d'autocorrélation cible.

Proposition 1.1.2

Soit R_M la fonction d'autocorrélation de $(Y_t^M, t \in \mathbb{R}^+)$ et R_Y la fonction d'autocorrélation de $(Y_t, t \in \mathbb{R})$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, R_M(t) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} R_Y(t). \quad (1.4)$$

Preuve

À partir de la proposition précédente, le résultat est immédiat. On peut d'autre part faire une preuve directe :

Lemme 1.1.3 (Formule de Mehler, [10])

Soit $(G_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus gaussien centré tel que $\mathbb{E}[G_t^2] = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et soit $R_G(t, s)$ sa fonction d'autocorrélation. Alors

$$\mathbb{E}[H_n(G_t) H_m(G_s)] = n! (R_G(t, s))^n \delta_{nm}, \quad (1.5)$$

(où δ symbole de Kronecker).

La formule de Mehler permet d'écrire

$$\begin{aligned}
R_Y(t-s) &= \mathbb{E}(Y_t Y_s) \\
&= \mathbb{E}(F_Y^{-1} \circ F_G(G_t) \cdot F_Y^{-1} \circ F_G(G_s)) \\
&= \sum_{m,n} f_m f_n \mathbb{E}(H_n(G_t) H_m(G_s)) \\
&= \sum_n (n!) f_n^2 R_G(t-s)^n \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 R_G(t-s)^n \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_t^M Y_s^M) \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} R_M(t-s).
\end{aligned}$$

□

1.2 Majoration de l'erreur

Proposition 1.2.1

Soit $r_M = \sum_{n=M+1}^{\infty} n! f_n^2$ le reste de la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} n! f_n^2 = 1$. Alors pour tout t fixé,

$$|R_Y(t) - R_M(t)| \leq r_M.$$

Preuve

Les fonctions d'autocorrélation sont données respectivement par

$$R_Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!) f_n^2 R_G(t)^n \quad (1.6)$$

et

$$R_M(t) = \sum_{n=1}^M (n!) f_n^2 R_G(t)^n. \quad (1.7)$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le fait que pour tout t ,

$$\begin{aligned}
|R_G(t)| &= \mathbb{E}(G_0 G_t) \\
&\leq \mathbb{E}(G_0^2)^{1/2} \mathbb{E}(G_t^2)^{1/2} \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
|R_Y(t) - R_M(t)| &= \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} (n!) f_n^2 R_G(t)^n \right| \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{\infty} (n!) f_n^2 |R_G(t)|^{M+1} \\
&\leq r_M
\end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité est bien sûr plus fine que la dernière, mais la quantité $|R_G(t)|$ n'est pas connue. $\square$

Exemple 1

Soit

$$Y_t = \frac{e^{G_t} - e^{1/2}}{\sqrt{e^2 - e}}, \quad (1.8)$$

processus stationnaire centré tel que $R_Y(0) = 1$.

Y_t est de la forme $Y_t = f(G_t)$, avec f et ses dérivées dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)$.

Par intégrations par parties, utilisant la relation $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on peut calculer aisément les coefficients f_n :

$$f_n = \mathbb{E} \left(\frac{f^{(n)}(G_t)}{n!} \right) \quad (1.9)$$

$$= \mathbb{E} \left(\frac{e^{G_t}}{n! \sqrt{e^2 - e}} \right) \quad (1.10)$$

$$= \frac{e^{1/2}}{n! \sqrt{e^2 - e}}. \quad (1.11)$$

Notant $C = \frac{e}{e^2 - e}$, on a

$$f_n^2 = \frac{C}{(n!)^2} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow r_M = C \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1.13)$$

$$\leq C \frac{1}{M.M!} \quad (1.14)$$

Donc

$$|R_Y(t) - R_M(t)| \leq C \frac{1}{M.M!}.$$

Remarque 1.2.2

Sous les notations de la proposition précédente, pour tout t ,

$$\mathbb{E}((Y_t - Y_t^M)^2) = r_M. \quad (1.15)$$

1.3 Convergence presque sûre

En supposant une condition forte sur la suite $(f_n)_n$, la convergence presque sûre peut être obtenue.

Proposition 1.3.1

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^2 f_n^2(n!) < \infty, \quad (1.16)$$

alors pour tout t fixé, la suite $(Y_t^M)_{M \in \mathbb{N}^*}$ converge p.s. vers Y_t .

Preuve

Lemme 1.3.2 ([34])

Soit $(Z_n)_n$ une suite de v.a. du second ordre orthogonales.

Si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\ln(n))^2 \mathbb{E}(Z_n^2) < \infty, \quad (1.17)$$

alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n$ converge p.s..

$(H_n(G_t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. orthogonales dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donc la proposition est démontrée en appliquant le lemme à la suite $(H_n(G_t))_{n \in \mathbb{N}^*}$. $\square$

1.4 Cas particulier

Proposition 1.4.1

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ($k \geq 1$) telle que f et ses dérivées vérifient $f^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)$ pour $0 \leq i \leq k$, les coefficients $(c_n(f))_n$ de son développement d'Hermite sont tels que $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^2 c_n(f)^2 n! < \infty$.

De plus et avec des notations évidentes, si on considère le processus défini par $Y_t = f(G_t)$, on a

$$\|Y_t - Y_t^M\|_{L^2(\Omega, A, \mathbb{P})}^2 = o_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{M^k} \right) \quad (1.18)$$

uniformément en t .

D'autre part, on a

$$\|Y_t - Y_t^M\|_{L^2(\Omega, A, \mathbb{P})}^2 \leq \left(\frac{(M+1-k)!}{(M+1)!} \right) \|f^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)}^2. \quad (1.19)$$

Preuve

Projetons f sur la base des polynômes d'Hermite.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) H_n \quad (1.20)$$

où

$$c_n(f) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) H_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad (1.21)$$

la série convergeant dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)$.

Lemme 1.4.2

Sous les hypothèses faites sur f , on a la relation

$$c_n(f) = \frac{(n-i)!}{n!} c_{n-i}(f^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq k. \quad (1.22)$$

Preuve du lemme 1.4.2

On montre tout d'abord que dès que f et f' sont dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2/2} \quad (1.23)$$

$$= 0. \quad (1.24)$$

Soit $A > 0$, en utilisant la définition des polynômes d'Hermite, puis en intégrant par parties on obtient :

$$\int_0^A f(x) H_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_0^A f(x) (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (1.25)$$

$$= \int_0^A f(x) (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (1.26)$$

$$= \left[f(x) (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]_0^A - \int_0^A f'(x) (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (1.27)$$

$$= \left[-f(x) H_{n-1}(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right]_0^A + \int_0^A f'(x) H_{n-1}(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (1.28)$$

Comme f et f' sont dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)$, on en déduit que $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) H_{n-1}(A) e^{-A^2/2} = l$ est finie. Si $l \neq 0$ alors on a l'équivalent

$$f^2(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{l^2 e^{x^2}}{H_{n-1}(x)^2}. \quad (1.29)$$

Or cet équivalent n'est pas intégrable par rapport à $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$. Donc $l = 0$. On démontre de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2/2} = 0$. Ceci permet d'écrire

$$c_n(f) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) H_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (1.30)$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} f'(x) H_{n-1}(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (1.31)$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} c_{n-1}(f'). \quad (1.32)$$

En itérant, on obtient donc la relation :

$$c_n(f) = \frac{(n-i)!}{n!} c_{n-i}(f^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq k. \quad (1.33)$$

Lemme 1.4.3

Toujours sous les mêmes hypothèses, on a

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} c_n(f)^2 n! = \underset{M \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{M^k} \right) \quad (1.34)$$

et

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} c_n(f)^2 n! \leq \left(\frac{(M+1-k)!}{(M+1)!} \right) \|f^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)}^2. \quad (1.35)$$

Preuve du lemme 1.4.3

Utilisant les relations entre les coefficients du développement d'Hermite, on peut écrire pour $M \geq k-1$:

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} c_n(f)^2 n! = \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(\frac{(n-k)!}{n!} c_{n-k}(f^{(k)}) \right)^2 n! \quad (1.36)$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(\frac{(n-k)!}{n!} \right) (n-k)! c_{n-k}(f^{(k)})^2 \quad (1.37)$$

$$\leq \sup_{n \geq M+1} \left(\frac{(n-k)!}{n!} \right) \left(\sum_{n=M+1-k}^{\infty} n! c_n(f^{(k)})^2 \right) \quad (1.38)$$

$$= \left(\frac{(M+1-k)!}{(M+1)!} \right) \left(\sum_{n=M+1-k}^{\infty} n! c_n(f^{(k)})^2 \right) \quad (1.39)$$

$$\leq \left(\frac{(M+1-k)!}{(M+1)!} \right) \|f^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)}^2 \quad (1.40)$$

Grâce à (1.39), on obtient (1.34) et (1.18), et de (1.40), on déduit (1.35) et (1.19).

Lemme 1.4.4

Avec les mêmes hypothèses sur f , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2 c_n(f)^2 n! < \infty. \quad (1.41)$$

Preuve du lemme 1.4.4

On a, pour $M \geq k$

$$\sum_{n=k}^M (\ln n)^2 c_n(f)^2 n! = \sum_{n=k}^M (\ln n)^2 \left(\frac{(n-k)!}{n!} c_{n-k}(f^{(k)}) \right)^2 n! \quad (1.42)$$

$$= \sum_{n=k}^M \left((\ln n)^2 \frac{(n-k)!}{n!} \right) (n-k)! c_{n-k}(f^{(k)})^2 \quad (1.43)$$

$$\leq \sup_{n \geq k} \left((\ln n)^2 \frac{(n-k)!}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! c_n(f^{(k)})^2 \right) \quad (1.44)$$

De (1.44), on déduit (1.41).

On peut alors conclure que pour tout t fixé, la suite $(Y_t^M)_M$ converge p.s. vers Y_t . $\square$

Exemple 2

Dans un exemple numérique choisi dans la partie précédente, on a

$$f(x) = F_Y^{-1} \circ F_G(x) \quad (1.45)$$

$$= (-1 - \ln(1 - F_G(x))). \quad (1.46)$$

On vérifie que cette fonction appartient bien à la classe de fonctions considérée ci-avant. Pour cela, calculons la dérivée à l'ordre k de f .

On a

$$\frac{d^k}{dy^k}(-1 - \ln(1 - y)) = \frac{(k-1)!}{(1-y)^k} \text{ pour } k \geq 1. \quad (1.47)$$

et

$$F_G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad (1.48)$$

$$\frac{d^k}{dx^k} F_G(x) = (-1)^{k-1} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_{k-1}(x), \text{ pour } k \geq 1. \quad (1.49)$$

On peut à présent calculer la dérivée à l'ordre k de f (pour la formule de dérivation à l'ordre k d'une fonction composée, on peut se reporter à [73]). Pour $k \geq 1$,

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = \sum_{\alpha/\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{(|\alpha| - 1)!}{(1 - F_G(x))^{| \alpha |}} \frac{(-1)^{k-|\alpha|} \prod_{i=1}^k (H_{i-1}(x))^{\alpha_i} \left(\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right)^{|\alpha|}}{(1!)^{\alpha_1} \times \dots \times (k!)^{\alpha_k}} \quad (1.50)$$

D'autre part, on a l'équivalent

$$1 - F_G(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad (1.51)$$

$$= \left[\frac{-e^{-t^2/2}}{t\sqrt{2\pi}} \right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi} t^2} dt \quad (1.52)$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}. \quad (1.53)$$

Donc tous les termes intervenant dans (1.50) sont dans $L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)$. La somme étant finie, on en déduit que les dérivées de f vérifient $f^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exemple 3

Si la loi marginale est obtenue à l'aide du principe de maximum d'entropie (voir la partie V), alors cette loi a une densité de la forme

$$p(y) = e^{-\lambda_0 - 1} \exp(-P(y)), \quad (1.54)$$

où

$$P(y) = \sum_{k=1}^N \lambda_k y^k \quad (1.55)$$

avec $N \geq 4$ pair et $\lambda_N > 0$.

La fonction de répartition relative à cette densité s'écrit par définition

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy. \quad (1.56)$$

Nous allons montrer que la fonction $f = F_Y^{-1} \circ F_G$ appartient à la classe de fonctions considérée. Pour cela on doit examiner le comportement de f et de ses dérivées en $\pm\infty$.

On a

$$(F_Y^{-1})'(y) = \frac{1}{F_Y'(F_Y^{-1}(y))} \quad (1.57)$$

$$(F_Y^{-1})''(y) = \frac{-F_Y''(F_Y^{-1}(y))}{F_Y'(F_Y^{-1}(y))^3} \quad (1.58)$$

$$(F_Y^{-1})'''(y) = \frac{3F_Y''(F_Y^{-1}(y))^2 - F_Y'''(F_Y^{-1}(y))F_Y'(F_Y^{-1}(y))}{F_Y'(F_Y^{-1}(y))^5}. \quad (1.59)$$

Et on peut montrer par récurrence que la dérivée k -ième de F_Y^{-1} ($k \geq 1$) peut s'écrire sous la forme

$$(F_Y^{-1})^{(k)} = \frac{P_k(F_Y' \circ F_Y^{-1}, \dots, F_Y^{(k)} \circ F_Y^{-1})}{(F_Y' \circ F_Y^{-1})^{2k-1}}, \quad (1.60)$$

où P_k désigne un polynôme à k variables de degré $k - 1$.

D'autre part

$$F_Y'(x) = p(x) \quad (1.61)$$

$$= e^{-\lambda_0 - 1} \exp(-P(x)) \quad (1.62)$$

$$F_Y''(x) = -e^{-\lambda_0 - 1} P'(x) \exp(-P(x)) \quad (1.63)$$

$$F_Y'''(x) = e^{-\lambda_0 - 1} ((P'(x))^2 - P''(x)) \exp(-P(x)) \quad (1.64)$$

$$(1.65)$$

et de manière générale

$$F_Y^{(k)}(x) = Q_k(x) \exp(-P(x)), \quad (1.66)$$

où Q_k est un polynôme de degré $(k-1) \times \deg(P') = (k-1)(N-1)$.

On examine donc dans un premier temps le comportement en 1^- (le comportement en 0^+ se traite de manière similaire) des fonctions

$$(F_Y^{(k)} \circ F_Y^{-1})(y) = Q_k(F_Y^{-1}(y)) \exp(-P(F_Y^{-1}(y))). \quad (1.67)$$

On a, via une intégration par parties et pour x assez grand,

$$1 - F_Y(x) = \int_x^{+\infty} p(y) dy \quad (1.68)$$

$$= \int_x^{+\infty} \frac{-P'(y)}{-P'(y)} e^{-\lambda_0-1} \exp(-P(y)) dy \quad (1.69)$$

$$= \left[\frac{p(y)}{-P'(y)} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{P'(y)} \right)' p(y) dy \quad (1.70)$$

$$\Rightarrow 1 - F_Y(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{p(x)}{P'(x)} = e^{-\lambda_0-1} \frac{\exp(-P(x))}{P'(x)}. \quad (1.71)$$

Donc

$$1 - y = 1 - F_Y \circ F_Y^{-1}(y) \underset{1^-}{\sim} e^{-\lambda_0-1} \frac{\exp(-P(F_Y^{-1}(y)))}{P'(F_Y^{-1}(y))} \quad (1.72)$$

$$\Rightarrow \ln(1 - y) \underset{1^-}{\sim} -P(F_Y^{-1}(y)) - \ln(P'(F_Y^{-1}(y))) \quad (1.73)$$

$$\underset{1^-}{\sim} -P(F_Y^{-1}(y)) \quad (1.74)$$

$$\underset{1^-}{\sim} -\lambda_N (F_Y^{-1}(y))^N \quad (1.75)$$

$$\Rightarrow F_Y^{-1}(y) \underset{1^-}{\sim} \left(-\frac{\ln(1 - y)}{\lambda_N} \right)^{1/N}. \quad (1.76)$$

Ainsi

$$(F_Y^{(k)} \circ F_Y^{-1})(y) \underset{1^-}{\sim} Q_k \left(\left(-\frac{\ln(1 - y)}{\lambda_N} \right)^{1/N} \exp(-P(F_Y^{-1}(y))) \right) \text{ (cf (1.76))} \quad (1.77)$$

$$\underset{1^-}{\sim} Q_k \left(\left(-\frac{\ln(1 - y)}{\lambda_N} \right)^{1/N} e^{\lambda_0+1} (1 - y) P'(F_Y^{-1}(y)) \right) \text{ (cf (1.72))} \quad (1.78)$$

$$\underset{1^-}{\sim} Q_k \left(\left(-\frac{\ln(1 - y)}{\lambda_N} \right)^{1/N} e^{\lambda_0+1} (1 - y) N \lambda_N \left(\left(-\frac{\ln(1 - y)}{\lambda_N} \right)^{1/N} \right)^{N-1} \right) \quad (1.79)$$

$$\underset{1^-}{\sim} A_k (1 - y) (-\ln(1 - y))^{\alpha_k}, \quad (1.80)$$

où A_k et $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $A_k \neq 0$.

Donc

$$(F'_Y \circ F_Y^{-1})^{2k-1}(y) \underset{1^-}{\sim} (A_1(1-y)(-\ln(1-y))^{\alpha_1})^{2k-1} \quad (1.81)$$

et

$$(F_Y^{-1})^{(k)}(y) = O_{y \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{(1-y)^k (-\ln(1-y))^{\beta_k}} \right), \quad (\text{cf (1.60)}) \quad (1.82)$$

où $\beta_k \in \mathbb{R}$.

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_G(x) = 1^-,$$

on a

$$(F_Y^{-1})^{(k)}(F_G(x)) = O_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(1-F_G(x))^k (-\ln(1-F_G(x)))^{\beta_k}} \right) \quad (1.83)$$

$$= O_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x}\right)^k \left(-\ln\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x}\right)\right)^{\beta_k}} \right) \quad (1.84)$$

$$= O_{x \rightarrow +\infty} \left((e^{x^2/2})^k x^{\gamma_k} \right), \quad (1.85)$$

où $\gamma_k \in \mathbb{R}$.

On obtient de la même manière

$$(F_Y^{-1})^{(k)}(F_G(x)) = O_{x \rightarrow -\infty} \left((e^{x^2/2})^k x^{\gamma_k} \right). \quad (1.86)$$

Or (cf [73] p.44 pour la dérivation à l'ordre k d'une fonction composée)

$$(F_Y^{-1} \circ F_G)^{(k)}(x) = \sum_{\alpha/\alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k} \frac{k!}{\alpha!} (F_Y^{-1})^{(|\alpha|)}(F_G(x)) \frac{(F'_G(x))^{\alpha_1} \times \dots \times (F_G^{(k)}(x))^{\alpha_k}}{(1!)^{\alpha_1} \times \dots \times (k!)^{\alpha_k}} \quad (1.87)$$

$$= \sum_{\alpha/\alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k} \frac{k!}{\alpha!} (F_Y^{-1})^{(|\alpha|)}(F_G(x)) \frac{(-1)^{k-|\alpha|} \prod_{i=1}^k (H_{i-1}(x))^{\alpha_i} \left(\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{|\alpha|}}{(1!)^{\alpha_1} \times \dots \times (k!)^{\alpha_k}} \quad (1.88)$$

On voit bien que, en $\pm\infty$, les termes en $e^{x^2/2}$ vus dans (1.85) s'équilibrent avec les termes en $e^{-x^2/2}$ et donc que tous les termes intervenant dans cette somme (finie) sont, d'après ce qui précède, dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)$. Ainsi $f = F_Y^{-1} \circ F_G$ et toutes ses dérivées sont des éléments de $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)$.

Remarque 1.4.5

Nous venons de montrer que, dans le cas où les données expérimentales se limitent à un nombre fini de moments, la série tronquée intervenant dans notre modèle converge p.s. et uniformément en m.q.. Lorsque les données comprennent la loi marginale d'ordre 1, c'est donc la régularité de cette loi qui conditionne la convergence du modèle.

2 Remarques sur le cas non stationnaire

Plaçons-nous dans un cadre non stationnaire et étudions la convergence de la série. Soit X processus aléatoire centré défini par

$$X_t = f(t, G_t) \quad (2.1)$$

où G est un processus gaussien admettant une loi marginale indépendante du temps $\mathcal{N}(0, 1)$ et f une fonction.

On note $R_X(t, t') = \mathbb{E}(X_t X_{t'})$.

Si $f(t, \cdot) \in L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)$, on peut écrire

$$f(t, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) H_n(\cdot) \text{ dans } L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx\right) \quad (2.2)$$

$$\text{où } f_n(t) = \int (n!)^{-1} f(t, x) H_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx. \quad (2.3)$$

Considérait

$$X_t^N = \sum_{n=1}^N f_n(t) H_n(G_t), \quad (2.4)$$

on a

$$\|X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2 = \sum_{n=1}^N (n!) f_n(t)^2. \quad (2.5)$$

Proposition 2.1

Si

$$\begin{cases} t \longmapsto \|X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2 \\ t \longmapsto R_X(t, t) \end{cases} \text{ sont continues sur } T \text{ compact de } \mathbb{R},$$

alors

$$X_t^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})} X_t$$

uniformément en t sur T .

Preuve

Pour tout t fixé, la suite $\left(\|X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2\right)_N$ tend en croissant vers $\|X_t\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2$. Donc (théorème de Dini) la suite $\left(\|X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2\right)_N$ tend uniformément en t vers $\|X_t\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2$ sur T compact.

Or

$$\|X_t - X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2 = \|X_t\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2 - \|X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2. \quad (2.6)$$

Donc

$$\|X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{uniformément sur } T} \|X_t\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2 \Rightarrow \|X_t - X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{uniformément sur } T} 0.$$

□

Corollaire 2.2

(Avec les notations de la proposition précédente.)

La fonction d'autocorrélation $R_{X_N}(t, t')$ de X_t^N converge uniformément en t, t' vers la fonction d'autocorrélation $R_X(t, t')$ de X_t sur T .

Preuve

Ce résultat est une conséquence de la proposition précédente.

En effet,

$$(X_t - X_t^N)X_{t'} + (X_{t'} - X_{t'}^N)X_t^N \quad (2.7)$$

$$= (X_t X_{t'}) - (X_t^N X_{t'}) + (X_{t'} X_t^N) - (X_{t'}^N X_t^N) \quad (2.8)$$

$$= (X_t X_{t'}) - (X_t^N X_{t'}^N) \quad (2.9)$$

D'où

$$|R_X(t, t') - R_{X_N}(t, t')| \leq |\mathbb{E}\{(X_t - X_t^N)X_{t'}\}| + |\mathbb{E}\{(X_{t'} - X_{t'}^N)X_t^N\}| \quad (2.10)$$

$$\leq \|X_t - X_t^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})} \|X_{t'}\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})} + \|X_{t'} - X_{t'}^N\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})} \|X_t\|_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}. \quad (2.11)$$

□

V PROBLÈME DES MOMENTS

Lors de ce travail de thèse, nous nous sommes tout naturellement intéressés au problème classique des moments : sous quelles hypothèses une suite de nombres réels est la suite des moments d'une loi de probabilité et dans quelles conditions cette loi est unique. Ce problème a largement été traité depuis la fin du 19ème siècle. L'ouvrage de référence utilisé pour la description de ceci dans le chapitre suivant est [66].

Dans le chapitre 2, nous avons apporté des éléments de généralisation au cas des processus stochastiques, les moments dépendant alors du paramètre indiquant le processus. Ceci vise une éventuelle application au cas des processus non stationnaires.

Dans le chapitre 3 est présenté une méthode de choix de loi de probabilité dont les moments sont fixés.

1 Problème classique des moments

(cf [56], [65], [66], [12], [52])

L'énoncé du problème des moments est le suivant : connaissant une suite $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ de nombres réels, existe-t-il une mesure positive bornée ψ définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\mu_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha d\psi(x) , \quad (1.1)$$

où l'on note classiquement $x^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ lorsque $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$?

Si de plus on impose la condition $\mu_{0,\dots,0} = 1$, une mesure solution de (1.1) est une mesure de probabilité. On prend donc $\mu_{0,\dots,0} = 1$ dans la suite.

1.1 Existence

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution de l'équation (1.1). Ce théorème s'inscrit en fait dans un cadre plus général que celui imposé ici. Définissons tout d'abord, pour tout polynôme de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ (on note $X = (X_1, \dots, X_n)$)

$$P(X) = \sum_{|\alpha| \leq \deg(P)} a_\alpha X^\alpha \text{ (où } |\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n),$$

$$\mu(P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \leq \deg(P)} a_\alpha \mu_\alpha. \quad (1.2)$$

Théorème 1.1.1 ([66])

Le problème des moments (1.1) a une solution ssi

$$\mu(P) \geq 0 \text{ pour tout polynôme } P \geq 0.$$

Ceci permet d'obtenir des critères pratiques dans le corollaire ci-après (où l'on ordonne $\mathbb{N}^n$ de manière naturelle).

Corollaire 1.1.2 ([66], [52])

- Une condition nécessaire pour que le problème des moments (1.1) admette une solution est que

$$\forall r \in \mathbb{N}, \det \left\{ (\mu_{\alpha+\beta})_{|\alpha| \leq r, |\beta| \leq r} \right\} \geq 0.$$

- Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème des moments (1.1) admette une solution est que

- i. dans le cas de l'existence d'une solution à support non réduit à un nombre fini de points,

$$\forall r \in \mathbb{N}, \det \left\{ (\mu_{\alpha+\beta})_{|\alpha| \leq r, |\beta| \leq r} \right\} > 0.$$

- ii. dans le cas de l'existence d'une solution à support réduit à $(k+1)$ points,

$$\forall r < k+1, \det \left\{ (\mu_{\alpha+\beta})_{|\alpha| \leq r, |\beta| \leq r} \right\} > 0,$$

$$\forall r \geq k+1, \det \left\{ (\mu_{\alpha+\beta})_{|\alpha| \leq r, |\beta| \leq r} \right\} = 0.$$

1.2 Unicité

Nous présentons ici trois critères d'unicité de la solution du problème des moments (1.1).

Théorème 1.2.1 ([65], condition d'analyticité de la fonction caractéristique)

Notons $A_k = \mu_{k,0,\dots,0} + \mu_{0,k,\dots,0} + \dots + \mu_{0,\dots,0,k}$.

Si le problème des moments (1.1) admet une solution et si

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{(A_{2k})^{1/2k}}{2k} < +\infty , \quad (1.3)$$

alors cette solution est unique.

Corollaire 1.2.2 ([65])

Si le problème des moments (1.1) admet une solution dont le support est borné alors cette solution est unique.

Remarques 1.2.3

- Le corollaire du paragraphe précédent donne ainsi une condition suffisante d'existence et d'unicité dans le cas de l'existence d'une solution à support réduit à un nombre fini de points.
- La condition (1.3) équivaut à l'analyticité de la fonction caractéristique de la solution du problème des moments.

Théorème 1.2.4 (test de Carleman [66], [56])

(Avec les notations du théorème précédent)

Si le problème des moments (1.1) admet une solution et si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (A_{2n})^{-1/2n} = +\infty ,$$

alors cette solution est unique.

Enfin, il existe une condition nécessaire d'unicité de la solution :

Théorème 1.2.5 (condition de Krein, [56], [12])

Si le problème des moments (1.1) admet une unique solution absolument continue - notons f sa densité -, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln(f(x))}{1+x^2} dx = -\infty .$$

2 Cas des processus

2.1 Théorème d'extension de Kolmogorov

Rappelons les résultats de base pour la construction des processus stochastiques.

Soit T un ensemble. Notons $\mathbb{R}^T \stackrel{\text{déf}}{=} \{g, g : T \rightarrow \mathbb{R}\}$ (on peut prendre $\mathbb{R}^d$ à la place de $\mathbb{R}$). Définissons les boréliens de $\mathbb{R}^T$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n \in T$ et $B_1, \dots, B_n$ boréliens de $\mathbb{R}$. On définit le cylindre

$$C(t_1, \dots, t_n; B_1, \dots, B_n) = \{g, g : T \rightarrow \mathbb{R} / g(t_j) \in B_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Soit enfin $\mathcal{C}$ l'ensemble des cylindres. La tribu $\mathcal{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$ est appelée tribu des boréliens de $\mathbb{R}^T$.

Pour des facilités de compréhension, notons $\Omega_t = \mathbb{R}$ pour tout $t \in T$.

Définition 2.1.1 (condition de compatibilité)

Soit

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in T \text{ deux à deux distincts}\}$$

une famille de mesures de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{F}$ satisfait la condition de compatibilité si

$$\forall t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in T \text{ deux à deux distincts}, \forall B \text{ borélien de } \Omega_{t_1} \times \dots \times \Omega_{t_n},$$

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(B \times \Omega_{t_{n+1}}) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(B).$$

Théorème 2.1.2 (Kolmogorov)

$\mathcal{F}$ satisfait la condition de compatibilité ssi il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathbb{P}(C(t_1, \dots, t_n; B_1, \dots, B_n)) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n),$$

pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n \in T$, B_j borélien de Ω_{t_j} , $j = 1, \dots, n$.

Bien évidemment ce théorème n'a d'intérêt que lorsque T est infini (nous prendrons par exemple $T = \mathbb{R}^+$ dans le cas où l'on considère un processus indexé par le temps).

2.2 Problème des moments pour les processus

Nous pouvons maintenant exposer un résultat, relatif à l'extension du problème classique des moments au cas des processus, que nous avons obtenu dans la perspective d'appliquer les méthodes de simulation à des processus non stationnaires.

Soit la famille de nombres réels

$$\mathcal{M} = \{M_{t_1, \dots, t_n}^\alpha, n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in T \text{ deux à deux distincts}, \alpha \in \mathbb{N}^n\},$$

avec $M_{t_1, \dots, t_n}^{0, \dots, 0} = 1$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in T$ deux à deux distincts. À n fixé et $t_1, \dots, t_n$ deux à deux distincts fixés, notons

$$\mathcal{M}_{t_1, \dots, t_n} = \{M_{t_1, \dots, t_n}^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$

Soit $(CE)_{t_1, \dots, t_n}$ la condition nécessaire et suffisante d'existence du problème des moments (1.1) pour la suite $\mu_\alpha = M_{t_1, \dots, t_n}^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n$, qui s'énonce :

i. dans le cas de l'existence d'une solution à support non réduit à un nombre fini de points,

$$\forall r \in \mathbb{N}, \det \left\{ \left(M_{t_1, \dots, t_n}^{\alpha+\beta} \right)_{|\alpha| \leq r, |\beta| \leq r} \right\} > 0.$$

ii. dans le cas de l'existence d'une solution à support réduit à $(k+1)$ points,

$$\forall r < k+1, \det \left\{ \left(M_{t_1, \dots, t_n}^{\alpha+\beta} \right)_{|\alpha| \leq r, |\beta| \leq r} \right\} > 0,$$

$$\forall r \geq k+1, \det \left\{ \left(M_{t_1, \dots, t_n}^{\alpha+\beta} \right)_{|\alpha| \leq r, |\beta| \leq r} \right\} = 0.$$

Soit $(CU)_{t_1, \dots, t_n}$ la condition suffisante d'unicité du problème des moments (1.1) pour la suite $\mu_\alpha = M_{t_1, \dots, t_n}^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n$ qui s'énonce
notant $A_{t_1, \dots, t_n}^k = M_{t_1, \dots, t_n}^{k, 0, \dots, 0} + M_{t_1, \dots, t_n}^{0, k, \dots, 0} + \dots + M_{t_1, \dots, t_n}^{0, \dots, 0, k}$,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{(A_{t_1, \dots, t_n}^{2k})^{1/2k}}{2k} < +\infty.$$

Remarque 2.2.1

La condition $(CU)_{t_1, \dots, t_n}$ est toujours vérifiée par une solution dont le support est réduit à un nombre fini de points.

Dans le cas où l'on travaille non plus avec la famille des lois marginales mais avec la famille des moments, l'analogue du théorème de Kolmogorov peut s'écrire :

Proposition 2.2.2

Si, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n \in T$ deux à deux distincts, la famille $\mathcal{M}_{t_1, \dots, t_n}$ vérifie les conditions $(CE)_{t_1, \dots, t_n}$ et $(CU)_{t_1, \dots, t_n}$,
et si pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in T$ deux à deux distincts, $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$M_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}^{(\beta, 0)} = M_{t_1, \dots, t_n}^\beta, \quad (2.1)$$

alors il existe un unique (à équivalence près) processus $(X_t, t \in T)$ dont la famille des moments coïncide avec $\mathcal{M}$.

Preuve

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_n \in T$ deux à deux distincts fixés. Si la famille $\mathcal{M}_{t_1, \dots, t_n}$ vérifie les conditions $(CE)_{t_1, \dots, t_n}$ et $(CU)_{t_1, \dots, t_n}$, alors $\mathcal{M}_{t_1, \dots, t_n}$ détermine une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$ (cf problème des moments pour un vecteur aléatoire).

Montrons que (2.1) exprime la condition de compatibilité pour la famille de mesures de probabilité

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in T \text{ deux à deux distincts}\}.$$

Soient $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}})$ et $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ vecteurs aléatoires de loi (respectivement) $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}$ et $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$. Notons $\phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}}}$ et $\phi_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}$ les fonctions caractéristiques correspondantes. Pour prouver la compatibilité, il suffit de montrer l'égalité

$$\phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}}}(z_1, \dots, z_n, 0) = \phi_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(z_1, \dots, z_n),$$

pour tous $z_1, \dots, z_n$. Sous les hypothèses $(CU)_{t_1, \dots, t_{n+1}}$ et $(CU)_{t_1, \dots, t_n}$, ces fonctions caractéristiques sont analytiques et on a explicitement

$$\phi_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(z_1, \dots, z_n) = \mathbb{E}_{t_1, \dots, t_n} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n z_k Y_{t_k} \right) \right] \quad (2.2)$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{M_{t_1, \dots, t_n}^\beta}{\beta!} (i)^{|\beta|} z^\beta. \quad (2.3)$$

De même,

$$\phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}}}(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{M_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}^\alpha}{\alpha!} (i)^{|\alpha|} z^\alpha \quad (2.4)$$

$$= \sum_{\alpha=(\beta, 0), \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{M_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}^\alpha}{\alpha!} (i)^{|\alpha|} z^\alpha \quad (2.5)$$

$$+ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n / \alpha_{n+1} \neq 0} \frac{M_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}^\alpha}{\alpha!} (i)^{|\alpha|} z^\alpha. \quad (2.6)$$

Donc

$$\phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}}}(z_1, \dots, z_n, 0) = \sum_{\alpha=(\beta, 0), \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{M_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}^\alpha}{\alpha!} (i)^{|\alpha|} z^\alpha \quad (2.7)$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{M_{t_1, \dots, t_n}^\beta}{\beta!} (i)^{|\beta|} z_1^{\beta_1} \dots z_n^{\beta_n} \quad (2.8)$$

$$= \phi_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(z_1, \dots, z_n). \quad (2.9)$$

Ainsi $\mathcal{F}$ vérifie la condition de compatibilité et on peut lui appliquer le théorème d'extension de Kolmogorov. Il existe donc un unique (à équivalence près) processus X de loi $\mathbb{P}$ tel que, pour tous $t_1, \dots, t_n \in T$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ a pour loi $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$.

En conclusion, il existe un unique (à équivalence près) processus X dont la famille des moments coïncide avec $\mathcal{M}$. $\square$

3 Maximum d'entropie

3.1 Introduction

En se donnant une suite infinie de moments, sous des hypothèses d'analyticité de la fonction caractéristique ou plus généralement sous les hypothèses données dans le problème des moments, on peut déterminer de manière unique la loi qui possède ces moments. Aussi le problème de simulation d'une v.a. de fonction caractéristique donnée est traité dans [12]. Cependant, dans la pratique, on

n'impose qu'un nombre fini de moments. Dans le cas présent, on se donne les N premiers moments de la loi marginale d'ordre 1 du processus (ou champ) strictement stationnaire à simuler.

Il y a une infinité de lois qui possèdent les mêmes N premiers moments. Comme nous n'avons pas d'autre information sur la loi marginale d'ordre 1 du processus à simuler, on utilise un critère de choix de modèle du type maximum d'entropie. Critère qui est bien adapté à notre cas.

3.2 Principe de maximum d'entropie

On décrit ici le principe du maximum d'entropie tel qu'il a été utilisé pour notre problème. Pour plus de détails, on peut se reporter au livre de Kapur et Kesavan [28] ainsi qu'à l'article [67]. Soit donc un vecteur aléatoire $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ de loi à déterminer dont on impose N moments de la forme :

$$\mu_{k_1 \dots k_d} = \mathbb{E}(Y_1^{k_1} \dots Y_d^{k_d}).$$

On impose deux a priori dans le critère de choix de modèle : le support de la loi cherchée et le fait que cette loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous prenons ici pour support tout $\mathbb{R}^d$. Pour ne pas charger les écritures, on prend $d = 1$ dans la suite.

Le principe du maximum d'entropie consiste en un problème d'optimisation sous contraintes. On cherche en effet la fonction densité p à support $\mathbb{R}$ qui maximise la fonction entropie

$$H[p] = - \int_{\mathbb{R}} p(y) \ln(p(y)) dy$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} p(y) dy = 1, \\ \mu_1 = \int_{\mathbb{R}} yp(y) dy, \\ \vdots \\ \mu_N = \int_{\mathbb{R}} y^N p(y) dy. \end{array} \right.$$

On note alors

$$\tilde{H}[p] = H[p] - \sum_{k=0}^N \lambda_k \left(\int_{\mathbb{R}} y^k p(y) dy - \mu_k \right),$$

où les $(\lambda_i)_{i=0}^N$ sont les multiplicateurs de Lagrange.

Une condition d'existence d'extremum est

$$-\ln p(y) - 1 - \sum_{k=0}^N \lambda_k y^k = 0$$

et la distribution du maximum d'entropie est de la forme

$$p(y) = e^{-\lambda_0 - 1} \exp\left(-\sum_{k=1}^N \lambda_k y^k\right).$$

Ainsi les multiplicateurs de Lagrange sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 1 & = & e^{-\lambda_0 - 1} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\sum_{k=1}^N \lambda_k y^k\right) dy, \\ \mu_1 & = & e^{-\lambda_0 - 1} \int_{\mathbb{R}} y \exp\left(-\sum_{k=1}^N \lambda_k y^k\right) dy, \\ \vdots & & \\ \mu_N & = & e^{-\lambda_0 - 1} \int_{\mathbb{R}} y^N \exp\left(-\sum_{k=1}^N \lambda_k y^k\right) dy. \end{array} \right.$$

Si ce système a une solution $(\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ et si cette solution est unique, alors la distribution du maximum d'entropie existe.

Remarque 3.2.1

Ce dernier système d'équations est non linéaire et sa résolution peut s'avérer délicate, surtout si N est grand. Généralement le caractère non gaussien est représenté par la donnée des 4 premiers moments qui reflète l'asymétrie de la loi et l'aplatissement par rapport à la loi gaussienne.

ANNEXES

A Processus stochastiques du second ordre

(cf [8], [32], [68])

Soit $(X_t, t \in \mathbb{R})$ processus stochastique du second ordre (i.e. $\forall t, X_t \in L^2(\mathbb{R})$).

A.1 Stationnarité

Définition A.1.1 (stationnarité stricte)

Le processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est dit strictement stationnaire si pour tout entier k , pour tous $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ et tout $h \in \mathbb{R}$, les lois de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$ coïncident.

Définition A.1.2 (stationnarité en m.q.)

Le processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est dit stationnaire en moyenne quadratique (m.q.), ou stationnaire du second ordre, si pour tout entier k et pour tous $(r, s, t) \in \mathbb{R}^3$

- $\mathbb{E}(X_t) = m$ (constante),
- $\mathbb{E}(X_t X_s) = \mathbb{E}(X_{t+r} X_{s+r})$.

Remarque A.1.3

La stationnarité stricte implique la stationnarité en m.q.. La réciproque est fausse sauf dans le cas des processus gaussiens.

A.2 Représentation intégrale

Définition A.2.1

Une fonction continue R est dite semi-définie positive si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{R}, \forall (z_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{C}, \sum_{j,k=1}^n R(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geq 0.$$

Théorème A.2.2 (BOCHNER)

R est semi-définie positive ssi on peut écrire

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dF(\lambda) ,$$

où F est réelle, croissante et bornée.

Définition A.2.3 (continuité en m.q.)

Le processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est dit continu en moyenne quadratique si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(|X_t - X_{t'}|^2) \xrightarrow{t' \rightarrow t} 0 .$$

Remarques A.2.4

Dans le cas où $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est centré, stationnaire en m.q. et continu en m.q., sa fonction d'autocorrélation $R_X(t) = \mathbb{E}(X_{t+s}X_s)$ est continue semi-définie positive et :

- La fonction dF du théorème est alors appelée mesure spectrale du processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$.
- F est définie à une constante additive près. D'autre part, F étant croissante, l'ensemble de ses points de discontinuités est de mesure de LEBESGUE nulle. On posera donc, sans perte de généralité, que F est continue à droite et $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = R_X(0)$.
- Si la mesure spectrale dF est absolument continue (par rapport à la mesure de LEBESGUE), sa densité est appelée densité spectrale du processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$.

Théorème A.2.5 (CRAMER)

Pour tout $(X_t, t \in \mathbb{R})$ processus centré, stationnaire du second ordre et continu en m.q., il existe $(Z_t, t \in \mathbb{R})$ processus à accroissements orthogonaux tel que, à t fixé,

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dZ_{\lambda} .$$

Remarque A.2.6

Si on pose $Z_{-\infty} = 0$, on a

$$\mathbb{E}(Z_{\lambda}) = 0, \quad \mathbb{E}(|Z_{\lambda}|^2) = F(\lambda) \text{ (mesure spectrale)}, \quad \mathbb{E}(|dZ(\lambda)|^2) = dF(\lambda) .$$

On dit que $(Z_t, t \in \mathbb{R})$ est le processus spectral associé à $(X_t, t \in \mathbb{R})$.

B Échantillonnage

(cf [68])

Théorème B.1 (SHANNON)

Soit $(X_t, t \in \mathbb{R})$ processus stochastique du second ordre, centré, stationnaire en m.q., continu en m.q. admettant une densité spectrale S_X bornée à support compact $[-\omega_s, \omega_s]$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_t = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} X_{t_\alpha} \frac{\sin(\omega_s(t - t_\alpha))}{\omega_s(t - t_\alpha)},$$

où $t_\alpha = \alpha \frac{\pi}{\omega_s}$ (la série convergeant en m.q.).

C Polynômes d'Hermite

C.1 Définition et premières propriétés

Définition C.1.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit les polynômes d'Hermite par

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque C.1.2

Les fonctions H_n ainsi définies sont des polynômes de degré n , dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1. Les 4 premiers polynômes d'Hermite ont pour expressions:

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

Proposition C.1.3

La famille $\left((\sqrt{n!})^{-1} H_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)$.

Aussi, les polynômes d'Hermite interviennent dans les coefficients du développement en série entière de la fonction de t , $F(x, t) = \exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right)$. En effet, on a:

Proposition C.1.4

$$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

A l'aide de ce développement, on peut démontrer facilement les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= n H_{n-1}(x), n \in \mathbb{N}^*, \\ H_n(x) &= x H_{n-1}(x) - (n-1) H_{n-2}(x), n \geq 2, \\ H_n(-x) &= (-1)^n H_n(x), n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

C.2 Polynômes d'Hermite appliqués à un vecteur aléatoire gaussien standard

Proposition C.2.1 ([35])

Soit $(G_1, \dots, G_p)$ ($p \geq 2$) un vecteur aléatoire gaussien tel que

$$\mathbb{E}G_j = 0, \mathbb{E}[G_j^2] = 1, \mathbb{E}[G_j G_k] = R_{jk}, (j, k) \in \{1, 2, \dots, p\}^2.$$

Alors

$$\mathbb{E}[H_{k_1}(G_1) \dots H_{k_p}(G_p)] = \begin{cases} \frac{k_1! \dots k_p!}{2^q q!} \sum' R_{i_1 j_1} \dots R_{i_q j_q} & \text{si } \begin{cases} k_1 + \dots + k_p = 2q, \\ 0 \leq k_1, \dots, k_p \leq q \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\sum'$ est la somme sur les indices $i_1, j_1, \dots, i_q, j_q$ tels que

- i. $i_1, j_1, \dots, i_q, j_q \in \{1, \dots, p\}$,
- ii. $i_1 \neq j_1, \dots, i_q \neq j_q$,
- iii. il y a k_1 indices 1, k_2 indices 2, ..., k_p indices p .

Exemple 4 (formule de MEHLER)

(Application de la proposition précédente dans le cas $p = 2$.)

Soit $G = \{G_t, t \in \mathbb{R}\}$ processus gaussien centré tel que $\mathbb{E}[G_t^2] = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et soit $R_G(t, s)$ sa fonction d'autocorrélation. On a

$$\mathbb{E}[H_n(G_t)H_m(G_s)] = n!(R_G(t, s))^n \delta_{nm},$$

(où δ_{nm} est le symbole de Kronecker).

D Relation entre équation différentielle d'Itô et équation différentielle au sens des distributions

La méthode de simulation par markovianisation approchée nous a amené à jongler entre la notion d'équation différentielle au sens d'Itô (pour les processus stochastiques ordinaires) et la notion d'équation différentielle au sens des distributions (pour les processus généralisés). La question d'établir un lien entre ces deux notions s'est naturellement posée. Nous exposons ci-après un résultat que nous avons obtenu à l'issue de cette réflexion (en collaboration avec J-L. Akian).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé. On considère les hypothèses suivantes :

- Soit b fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe C_1 et C_2 constantes positives pour lesquelles on a les inégalités

$$\begin{cases} |b(x)| \leq C_1(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R} \\ |b(x_2) - b(x_1)| \leq C_2|x_2 - x_1|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où l'on note que la seconde condition d'inégalité sur b implique la première.

- Soit σ fonction mesurable sur $\mathbb{R}^+$ telle qu'il existe une constante C pour laquelle

$$|\sigma(t)| \leq C.$$

On suppose de plus que σ est absolument continue et qu'il existe $p \geq 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\sigma'(t)|^2}{(1+t)^p} dt < \infty.$$

- Soit ξ_0 v.a. indépendante de la tribu engendrée par $(B_t, 0 \leq t < +\infty)$, où $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ mouvement brownien standard, telle que $\mathbb{E}(|\xi_0|^2) < +\infty$.

Considérons d'autre part l'ensemble de fonctions

$$A = \{f \text{ mesurables telles que } f : \mathbb{R}^+ \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ et } \exists p \geq 0 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathbb{E}(|f(t)|^2)}{(1+t)^p} dt < +\infty\}.$$

Théorème D.1

Soit $(\xi_t, t \in \mathbb{R}^+)$ processus continu du second ordre tel que $\xi \in A$. On a l'équivalence

$$\forall t \geq 0, \xi_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma(s) dB(s) + \int_0^t b(\xi_s) ds \quad (\text{D.2})$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+), \int_{\mathbb{R}^+} \xi_t \phi'(t) dt = -\xi_0 \phi(0) + \int_{\mathbb{R}^+} B(t) (\sigma \phi)'(t) dt - \int_{\mathbb{R}^+} b(\xi_t) \phi(t) dt. \quad (\text{D.3})$$

Preuve

On montre dans un premier temps l'implication (D.2) $\Rightarrow$ (D.3).

Lemme D.2

Soit $a \in A$,

i. l'application

$$\begin{aligned} \phi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^+} a(t) \phi(t) dt \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^+) &\rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \end{aligned}$$

est bien définie et linéaire continue.

ii. $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$,

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t a(s) ds \right)^2 \phi(t)^2 \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Preuve du lemme

i. On a

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^+} (\mathbb{E}[(a(t)\phi(t))^2])^{1/2} dt \right\}^2 = \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} |\phi(t)| \mathbb{E}(a(t)^2)^{1/2} dt \right\}^2 \quad (\text{D.4})$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathbb{E}(a(t)^2)}{(1+t)^p} dt \cdot \int_{\mathbb{R}^+} \phi(t)^2 (1+t)^p dt \quad (\text{D.5})$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathbb{E}(a(t)^2)}{(1+t)^p} dt \cdot \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1+t)^2} dt \cdot \left(\sup_{t \geq 0} |\phi(t)(1+t)^{p/2+1}| \right)^2 \quad (\text{D.6})$$

$$< \infty. \quad (\text{D.7})$$

Ceci démontre (cf [73] p.221) que l'application $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} a(t)\phi(t)dt$ est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ et l'inégalité supplémentaire

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^+} a(t)\phi(t)dt \right)^2 \right) \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} (\mathbb{E}((a(t)\phi(t))^2))^{1/2} dt \right\}^2, \quad (\text{D.8})$$

permet de conclure grâce à (D.6) que la fonction $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} a(t)\phi(t)dt$ est à valeur dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$.

ii. On démontre ce résultat par la simple série d'inégalités suivante :

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t a(s)ds \right)^2 \phi(t)^2 \right) \leq \mathbb{E} \left(t \int_0^t a(s)^2 ds \right) \phi(t)^2 \quad (\text{D.9})$$

$$\leq \int_0^t \mathbb{E}(a(s)^2) ds \cdot t \phi(t)^2 \quad (\text{D.10})$$

$$\leq \int_0^t \frac{\mathbb{E}(a(s)^2)}{(1+s)^p} (1+s)^p ds \cdot t \phi(t)^2 \quad (\text{D.11})$$

$$\leq \int_0^t \frac{\mathbb{E}(a(s)^2)}{(1+s)^p} ds \cdot t(1+t)^p \phi(t)^2, \quad (\text{D.12})$$

ceci tendant vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ car $a \in A$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$.

Retour à la preuve du théorème

En multipliant l'équation (D.2) par ϕ' puis intégrant entre 0 et T , on obtient

(D.2) $\Rightarrow$

$$\int_0^T \xi_t \phi'(t) dt = \int_0^T \xi_0 \phi'(t) dt + \int_0^T \left(\int_0^t \sigma(s) dB(s) \right) \phi'(t) dt \quad (\text{D.13})$$

$$+ \int_0^T \left(\int_0^t b(\xi_s) ds \right) \phi'(t) dt,$$

où l'on doit vérifier que toutes les intégrales sont bien définies. En effet :

$t \mapsto \xi_t$ est continue du second ordre par hypothèse,

$t \mapsto \int_0^t \sigma(s) dB(s)$ est aussi continue du second ordre car (où $t' \geq t$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\int_t^{t'} \sigma(s) dB(s) \right)^2 \right) &= \int_t^{t'} \sigma(s)^2 ds \\ &\leq C(t' - t) \\ &\xrightarrow{t' \rightarrow t} 0, \end{aligned}$$

de même $t \mapsto \int_0^t b(\xi_s) ds$ est continue du second ordre car (où $t' \geq t$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left(\int_t^{t'} b(\xi_s) ds \right)^2 \right\} &\leq \mathbb{E} \left(\int_t^{t'} b(\xi_s)^2 ds \right) (t' - t) \\ &\leq \left(\int_t^{t'} 2C_1^2 (1 + \mathbb{E}(\xi_s^2)) ds \right) (t' - t) \\ &\xrightarrow{t' \rightarrow t} 0, \end{aligned}$$

et on démontre aussi aisément que ces trois applications sont des éléments de A .

Comme σ est absolument continue (par hypothèse), on peut intégrer par parties pour obtenir :

(D.2) $\Rightarrow$

$$\int_0^T \xi_t \phi'(t) dt = \xi_0 \phi(T) - \xi_0 \phi(0) \tag{D.14}$$

$$+ \int_0^T \left(\sigma(t) B(t) - \int_0^t \sigma'(s) B(s) ds \right) \phi'(t) dt + \int_0^T \left(\int_0^t b(\xi_s) ds \right) \phi'(t) dt.$$

Pour pouvoir de nouveau intégrer par parties, montrons l'absolue continuité des quantités qui entrent en jeu.

$t \mapsto \phi(t)$ est absolument continue,

$t \mapsto \int_0^t \sigma'(s) B(s) ds$ est absolument continue car $\sigma' B \in L^1(]0, t[), \forall t \in \mathbb{R}^+$,

$t \mapsto \int_0^t b(\xi_s) ds$ est absolument continue pour presque tout ω car $s \mapsto b(\xi_s) \in L^1(]0, t[)(p.s.)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, comme on le montre ci-après :

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t |b(\xi_s)| ds \right)^2 &\leq \int_0^t |b(\xi_s)|^2 ds \times t \\
&\leq 2C_1^2 \left(\int_0^t (1 + |\xi_s|^2) ds \right) t, \\
\Rightarrow \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^t |b(\xi_s)| ds \right)^2 \right\} &\leq 2C_1^2 t \times \int_0^t (1 + \mathbb{E}(|\xi_s|^2)) ds \\
&< \infty \\
\text{d'où } \int_0^t |b(\xi_s)| ds &< \infty \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

On a donc

(D.2) $\Rightarrow$

$$\int_0^T \xi_t \phi'(t) dt = \xi_0 \phi(T) - \xi_0 \phi(0) + \int_0^T \sigma(t) B(t) \phi'(t) dt \quad (\text{D.15a})$$

$$- \left[\left(\int_0^t \sigma'(s) B(s) ds \right) \phi(t) \right]_0^T \quad (\text{D.15b})$$

$$+ \int_0^T \sigma'(t) B(t) \phi(t) dt \quad (\text{D.15c})$$

$$+ \left[\left(\int_0^t b(\xi_s) ds \right) \phi(t) \right]_0^T \quad (\text{D.15d})$$

$$- \int_0^T b(\xi_t) \phi(t) dt. \quad (\text{D.15e})$$

On peut montrer que toutes ces intégrales sont bien définies (en vérifiant les hypothèses du lemme). La deuxième partie du lemme, nous permet d'écrire que les quantités (D.15b) et (D.15d) tendent vers 0 en moyenne quadratique quand T tend vers $+\infty$.

Donc

(D.2) $\Rightarrow$

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+), \int_{\mathbb{R}^+} \xi_t \phi'(t) dt = -\xi_0 \phi(0) + \int_{\mathbb{R}^+} B(t) (\sigma \phi)'(t) dt - \int_{\mathbb{R}^+} b(\xi_t) \phi(t) dt. \quad (\text{D.16})$$

Démontrons maintenant la réciproque (D.3) $\Rightarrow$ (D.2).

Lemme D.3

$$\{\phi' / \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)\} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$$

Preuve du lemme

L'implication $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+) \Rightarrow \phi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ est triviale.

On s'intéresse donc à la réciproque.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. On veut trouver $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\phi' = \psi$. Pour cela on pose

$$\phi(x) = - \int_x^{+\infty} \psi(t) dt \quad (x \geq 0).$$

Montrons donc que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$.

Pour $\beta \geq 1$, on a bien

$$\|x^\alpha \phi^{(\beta)}(x)\|_\infty \leq C_{\alpha,\beta}, \text{ où } C_{\alpha,\beta} \text{ constante positive,}$$

car $\phi^{(\beta)} = \psi^{(\beta-1)}$.

Pour $\beta = 0$, on a

$$\forall \beta' \geq 0, \left| t^{\beta'} \psi(t) \right| \leq C_{\beta'} \quad (\text{D.17})$$

$$\text{donc } |\psi(t)| \leq \frac{C_{\beta'}}{|t|^{\beta'}} \text{ (pour } t \neq 0 \text{).} \quad (\text{D.18})$$

$$(\text{D.19})$$

Donc pour $\beta' \geq 2$:

$$\left| x^\alpha \int_x^\infty \psi(t) dt \right| \leq x^\alpha C_{\beta'} \frac{x^{-\beta'+1}}{|-\beta'+1|}. \quad (\text{D.20})$$

Si on prend de plus β' tel que $\alpha - \beta' + 1 \leq 0$, on a bien

$$\left| x^\alpha \int_x^\infty \psi(t) dt \right| \leq C_\alpha, \quad (\text{D.21})$$

et le lemme est démontré.

Retour à la preuve du théorème

Par ce lemme, on a donc (après avoir vu que toutes les intégrales sont bien définies)

(D.3) $\Rightarrow$

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+), \int_{\mathbb{R}^+} \phi(t) \left(\xi_t - \xi_0 - \int_0^t \sigma(s) dB(s) - \int_0^t b(\xi_s) ds \right) dt = 0. \quad (\text{D.22})$$

Notons

$$A(t) = \xi_t - \xi_0 - \int_0^t \sigma(s) dB(s) - \int_0^t b(\xi_s) ds.$$

On obtient

(D.3) $\Rightarrow$

$$\forall T > 0, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0, T[), \int_0^T \phi(t) A(t) dt = 0 \quad (\text{D.23})$$

$$\forall T > 0, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^0(]0, T[), \int_0^T \phi(t) A(t) dt = 0, \quad (\text{D.24})$$

par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(]0, T[)$ dans $\mathcal{C}_0^0(]0, T[)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et donc pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(]0, T[)}$, et d'autre part

$$t \mapsto A(t) \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})) \Rightarrow t \mapsto A(t) \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})).$$

Donc pour tous $T > 0$, $\phi \in \mathcal{C}_0^0(]0, T[)$ et $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a

$$\int_0^T \phi(t) \psi \cdot A(t) dt = 0, \quad (\text{D.25})$$

où

$$t \mapsto \phi(t) \psi \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})).$$

Le sous-espace vectoriel des fonctions étagées $\mathcal{E}(]0, T[, L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ est dense dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ (cf [73]). D'autre part, on sait que pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^0(]0, T[)$ telle que $\|\mathbb{1}_A - \phi\|_{L^2(]0, T[)} \leq \epsilon$. Ainsi, l'espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \phi(t) \psi$ (où $\phi \in \mathcal{C}_0^0(]0, T[)$ et $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) est dense dans $\mathcal{E}(]0, T[, L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ et donc dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$. On en déduit donc que

$$\forall t \in [0, T], \quad A(t) = 0, \quad (\text{D.26})$$

i.e.

$$A \equiv 0, \quad (\text{D.27})$$

ce qui conclut la preuve de la réciproque.

□

E Mouvement brownien à plusieurs paramètres et Intégrale de Wiener-Itô

Dans cette annexe , nous nous sommes intéressés à redémontrer une formule d'intégration par parties, évoquée dans la première partie, qui permet d'établir le lien entre bruit blanc et mouvement brownien. La démonstration ci-après fait suite à une communication privée de J-L. Akian.

On considère le triplet hilbertien $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et la mesure bruit blanc μ_W associée. Le mouvement brownien est défini par

$$B_{t_1, \dots, t_d}(\omega) = \langle \omega, \prod_{i=1}^d \text{sign}(t_i) \mathbb{I}_{[t_i \wedge 0, t_i \vee 0]} \rangle, \quad (\text{E.1})$$

et l'intégrale de Wiener-Itô par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dB(x, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \omega, \phi \rangle, \quad \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d). \quad (\text{E.2})$$

Le résultat suivant se trouve dans [24]. L'objet de cette annexe est d'en proposer une démonstration.

Proposition E.1

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dB(x) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) B(x) dx. \quad (\text{E.3})$$

Preuve

Dans un premier temps, montrons que l'écriture $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) B(x) dx$ a bien un sens :

$$\mathbb{E} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) B(x) dx \right|^2 \right) \leq \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) (1 + |x|)^n \right|^2 dx \right. \\ \left. \times \int_{\mathbb{R}^d} |(1 + |x|)^{-n} B(x)|^2 dx \right\} \quad (\text{E.4})$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) (1 + |x|)^n \right|^2 dx \\ \times \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{-2n} \mathbb{E}(B(x)^2) dx \quad (\text{E.5})$$

$$\leq cste \times \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{-2n} |x| dx \quad (\text{car } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \quad (\text{E.6})$$

$$< +\infty \text{ pour } n \text{ choisi assez grand,} \quad (\text{E.7})$$

$$(\text{E.8})$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) B(x) \right| dx < +\infty \quad \mu_W - \text{p.s.} \quad (\text{E.9})$$

Soit maintenant $a_1, \dots, a_d$ réels strictement positifs et soit $A = \prod_{i=1}^d]-a_i, a_i[$. On considère alors l'intégrale

$$I_A(\omega) = (-1)^d \int_A \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \cdot \langle \omega, \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{1}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]} \rangle dx. \quad (\text{E.10})$$

Remarquant que la fonction $x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto \langle \omega, \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{1}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]} \rangle$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ pour μ_W -presque tout ω , on peut exprimer $I_A(\omega)$ comme la limite de sommes de Riemann :

$$I_A(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} (-1)^d \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^N \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}) \\ \times \langle \omega, \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i^{n_i}) \mathbb{1}_{[x_i^{n_i} \wedge 0, x_i^{n_i} \vee 0]} \rangle \cdot \prod_{i=1}^d \left(\frac{2a_i}{N} \right), \quad (\text{E.11})$$

où l'on a choisi $\frac{2a_i}{N}$ pour pas de subdivision dans la direction i et où $(x_i^{n_i})_{n_i}$ sont les points de la subdivision dans la direction i .

D'autre part, la fonction $x \mapsto \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ donc la fonction $x \mapsto \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (complet). Ceci implique l'intégrabilité de cette fonction et l'intégrale

$$I_A = (-1)^d \int_A \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]} dx \quad (\text{E.12})$$

peut s'écrire comme la limite dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de sommes de Riemann :

$$I_A = \lim_{N \rightarrow \infty} (-1)^d \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^N \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}) \prod_{i=1}^d \left(\text{sign}(x_i^{n_i}) \mathbb{I}_{[x_i^{n_i} \wedge 0, x_i^{n_i} \vee 0]} \frac{2a_i}{N} \right). \quad (\text{E.13})$$

Notons

$$I_A^N \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^d \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^N \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}) \left(\prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i^{n_i}) \mathbb{I}_{[x_i^{n_i} \wedge 0, x_i^{n_i} \vee 0]} \frac{2a_i}{N} \right).$$

Rappelons que par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut définir $\langle \cdot, f \rangle$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que l'on a l'égalité $\mathbb{E}(\langle \cdot, f \rangle^2) = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$. Donc

$$\mathbb{E}(\langle \cdot, I_A - I_A^N \rangle^2) = \|I_A - I_A^N\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{E.14})$$

On peut ainsi extraire une sous-suite $(I_A^{N_k})_k$ telle que

$$\langle \cdot, I_A^{N_k} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle \cdot, I_A \rangle \quad \mu_W - \text{p.s.}, \quad (\text{E.15})$$

i.e.

$$\langle \omega, I_A^{N_k} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle \omega, I_A \rangle \quad \text{pour } \mu_W - \text{presque tout } \omega. \quad (\text{E.16})$$

Or

$$I_A(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \omega, I_A^N \rangle \quad (\text{E.17})$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \omega, I_A^{N_k} \rangle \quad (\text{E.18})$$

$$= \langle \omega, I_A \rangle. \quad (\text{E.19})$$

Donc

$$I_A(\omega) = \langle \omega, I_A \rangle \quad \text{pour } \mu_W - \text{presque tout } \omega. \quad (\text{E.20})$$

Ce qui donne

$$I_A(\omega) = \langle \omega, (-1)^d \int_A \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]} dx \rangle. \quad (\text{E.21})$$

Soit $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. On considère l'intégrale définie au point y :

$$J_A(y) = (-1)^d \int_A \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \cdot \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}(y) dx. \quad (\text{E.22})$$

Faisant des calculs simples sur les intégrales, on écrit

$$\begin{aligned} J_A(y) &= (-1)^d \int_{]-a_1; a_1[} \int_{]-a_2; a_2[\times \dots \times]-a_d; a_d[} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \cdot \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}(y) dx \\ &= (-1)^d \int_{]a_1 \wedge y_1; a_1[} \int_{]-a_2; a_2[\times \dots \times]-a_d; a_d[} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \\ &\quad \times \prod_{i=2}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}(y_2, \dots, y_d) dx, \quad \text{si } y_1 \geq 0 \\ &= -(-1)^d \int_{]-a_1; (-a_1) \vee y_1[} \int_{]-a_2; a_2[\times \dots \times]-a_d; a_d[} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \\ &\quad \times \prod_{i=2}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}(y_2, \dots, y_d) dx, \quad \text{si } y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

En faisant tendre a_1 vers $+\infty$ et en utilisant le fait que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{a_1 \rightarrow +\infty} J_A(y) = (-1)^{d-1} \int_{]-a_2; a_2[\times \dots \times]-a_d; a_d[} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_2 \dots \partial x_d}(y_1, x_2, \dots, x_d) \cdot \prod_{i=2}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}(y_2, \dots, y_d) dx. \quad (\text{E.23})$$

Ce qui donne, en itérant d fois ce procédé,

$$\lim_{a_1 \rightarrow +\infty, \dots, a_d \rightarrow +\infty} J_A(y) = \phi(y), \quad (\text{E.24})$$

i.e.

$$(-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x) \cdot \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]}(y) dx = \phi(y). \quad (\text{E.25})$$

Donc

$$\mathbb{E}(< \cdot, I_A - \phi >^2) = \|I_A - \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \quad (\text{E.26})$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \cdot \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]} dx \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \quad (\text{E.27})$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus A} \left\| \frac{\partial^d \phi}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \cdot \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i) \mathbb{I}_{[x_i \wedge 0, x_i \vee 0]} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} dx \right)^2 \quad (\text{E.28})$$

et

$$\mathbb{E}(< \cdot, I_A - \phi >^2) \xrightarrow{a_1, \dots, a_d \rightarrow +\infty} 0. \quad (\text{E.29})$$

On peut donc extraire une sous-suite $a^n = (a_1^n, \dots, a_d^n)$ telle que, si $A^n =]-a_1^n, a_1^n[\times \dots \times]-a_d^n, a_d^n[$,

$$< \omega, I_{A^n} > \xrightarrow{a_1^n, \dots, a_d^n \rightarrow +\infty} < \omega, \phi > \quad \text{pour } \mu_W - \text{presque tout } \omega. \quad (\text{E.30})$$

De (E.20) et (E.30), on déduit l'égalité (E.3). □

Bibliographie

- [1] AZENCOTT, R. ET DACUNHA-CASTELLE, D. *Séries d'observations irrégulières modélisation et prévision*. Masson (1984).
- [2] BERNARD, P. ET BONNEMOY, C. An algorithm for spectral factorization using random search techniques. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **4**(2), 67–72 (1989).
- [3] BERNARD, P. ET FLEURY, G. Stochastic newmark method. Dans *Computational Stochastic Mechanics*, édité par P. Spanos, pages 365–373 (1999).
- [4] BERNARD, P., FOGLI, M., BRESSOLETTE, P. ET LEMAIRE, M. Un algorithme de simulation stochastique par markovianisation approchée, application à la mécanique aléatoire. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, **3**(6), 905–950 (1984).
- [5] BOULEAU, N. ET LÉPINGLE, D. *Numerical Methods for Stochastic Processes*. John Wiley & Sons (1994).
- [6] CAMERON, R. ET MARTIN, W. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. *Annals of Mathematics*, **48**(2), 385–392 (1947).
- [7] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann (1964).
- [8] CRAMER, H. ET LEADBETTER, M. *Stationary and Related Stochastic Processes*. John Wiley & Sons (1967).
- [9] DECK, T., POTTHOFF, J. ET VÅGE, G. A review of white noise analysis from a probabilistic standpoint. *Acta Applicandae Mathematicae*, **48**, 91–112 (1997).
- [10] DECLERCQ, D. *Apport des polynômes d'Hermite à la modélisation non gaussienne et tests statistiques associés*. Thèse de 3ème cycle, Université de Cergy-Pontoise (1998).
- [11] DEODATIS, G. ET SHINOZUKA, M. Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Applied Mechanics Reviews*, **44**(4), 191–204 (1991).
- [12] DEVROYE, L. *Non Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag (1986).
- [13] DOBRUSHIN, R. Gaussian and their subordinated self-similar random generalized fields. *The Annals of Probability*, **7**(1), 1–28 (1979).
- [14] DUFLO, M. *Algorithmes stochastiques*. Springer (1996).
- [15] GHANEM, R. ET SPANOS, P. A spectral representation of stochastic finite elements. Dans *Probabilistic Methods for Structural Design*, édité par C. Guedes Soares, pages 289–312 (1997).
- [16] GIOFFRÈ, M., GIUSELLA, V. ET GRIGORIU, M. Simulation of non-Gaussian field applied to wind pressure fluctuations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **15**, 339–345 (2000).

- [17] GRIGORIU, M. Simulation of stationary non-Gaussian translation processes. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, **124**(2), 121–127 (1998).
- [18] GRIGORIU, M. A spectral representation based model for Monte Carlo simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **15**, 365–370 (2000).
- [19] GUELFAND, I. ET VILENKIN, N. *Les distributions*, tm. 4 de *Applications de l'analyse harmonique*. Dunod (1967). traduit par G. Rideau.
- [20] GURLEY, K. ET KAREEM, A. Simulation of non-Gaussian processes. Dans *Computational Stochastic Mechanics*, édité par P. Spanos, pages 11–20 (1999).
- [21] HIDA, T. *Brownian Motion*. Springer-Verlag (1980).
- [22] HIDA, T. ET HITSUDA, M. Gaussian processes. Dans *Translations of Mathematical Monographs*, tm. 120. American Mathematical Society (1993).
- [23] HIDA, T., KUO, H., POTTHOFF, J. ET STREIT, L. *White Noise An infinite dimensional calculus*. Kluwer Academic Publishers (1993).
- [24] HOLDEN, H., ØKSENDAL, B., UBØE, J. ET ZHANG, T. *Stochastic Partial Differential Equations. A Modeling, White Noise Functional Approach*. Probability and its Applications. Birkhäuser (1996).
- [25] I.A.S.S.A.R. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. Dans *Probabilistic Engineering Mechanics*, édité par M. Shinozuka et P. Spanos, tm. 12, pages 197–321 (1997).
- [26] ITÔ, K. Multiple Wiener integral. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **3**(1), 157–169 (1951).
- [27] JANSON, S. *Gaussian Hilbert Spaces*. Cambridge University Press (1997).
- [28] KAPUR, J. ET KESAVAN, H. *Entropy Optimization Principles with Applications*. Academic Press, Inc. (1992).
- [29] KENNEDY, C. ET LENNOX, W. Solution to the practical problem of moments using non-classical orthogonal polynomials, with applications for probabilistic analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **15**, 371–379 (2000).
- [30] KRÉE, P. ET SOIZE, C. Markovianization of non linear oscillators with colored input. Dans *Actes de la conférence de mécanique aléatoire à l'École Polytechnique de Turin*, pages 135–150 (1982).
- [31] KRÉE, P. ET SOIZE, C. *Mécanique aléatoire*. Dunod (1983).
- [32] LACROIX, J. Processus du second ordre et applications au signal. Cours de maîtrise, Université Pierre et Marie Curie.

- [33] LI, R. ET GHANEM, R. Adaptive polynomial chaos expansions applied to statistics of extremes in nonlinear random vibration. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **13**(2), 125–136 (1998).
- [34] LOÈVE, M. *Probability Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, deuxième édn. (1960).
- [35] MAJOR, P. Multiple Wiener-Itô integrals. Dans *Lecture Notes in Mathematics*, édité par A. Dold et B. Eckmann, tm. 849. Springer-Verlag (1981).
- [36] MIGNOLET, M. ET SPANOS, P. Recursive simulation of stationary multivariate random processes, part i. *Journal of Applied Mechanics*, **54**(3), 674–680 (1987).
- [37] MIGNOLET, M. ET SPANOS, P. Recursive simulation of stationary multivariate random processes, part ii. *Journal of Applied Mechanics*, **54**(3), 681–687 (1987).
- [38] MINLOS, R. Generalized random processes and their extension to a measure. *Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability*, **3**, 291–313 (1962).
- [39] NEVEU, J. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson (1964).
- [40] NEVEU, J. *Processus aléatoires gaussiens*. Presses Universitaires de Montréal (1968).
- [41] NIELSEN, M., HØJSTRUP, J., HANSEN, K. ET THESBERG, L. Validity of the assumption of Gaussian turbulence. Dans *Proceedings of the European Wind Energy Conference, Denmark* (2001).
- [42] NUALART, D. The Malliavin calculus and related topics. Dans *Probability and its Applications*. Springer-Verlag (1995).
- [43] ORMONEIT, D. ET WHITE, H. An efficient algorithm to compute maximum entropy densities. *Econometric Review*, **18**(2), 127–140 (1999).
- [44] PARDOUX, E. ET TALAY, D. Discretization and simulation of stochastic differential equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, **3**, 23–47 (1985).
- [45] PARZEN, E. *Stochastic processes*. Holden-Day (1962).
- [46] PIETSCH, A. *Nuclear locally convex spaces*. Springer-Verlag (1972).
- [47] POIRION, F. *Étude Numérique de la Mécanique Aléatoire des Systèmes à Nombre Variable de Liaisons*. Thèse de 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1983).
- [48] POIRION, F. Simulation des forces généralisées en turbulence isotrope et simulation de la couche limite atmosphérique anisotrope (0-300) mètres. Rap. tech. RT 33/5108 RY 060-073R, Onera (1988).
- [49] POIRION, F. Response of an airplane to non-Gaussian atmospheric turbulence. *Journal of Aircraft*, **28**(9) (1991).

- [50] POIRION, F. Numerical simulation of homogeneous non-Gaussian random vector fields. *Journal of Sound and Vibration*, **160**(1), 25–42 (1993).
- [51] POIRION, F. Effective methods in stochastic non-linear dynamics, aeroservoelasticity applications. Dans *Progress in stochastic structural dynamics*, édité par R. Bouc et C. Soize, pages 79–107. CNRS (1999).
- [52] POIRION, F. Simulation of random vectors with given moments. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **16**(2), 115–120 (2001).
- [53] POIRION, F. ET SOIZE, C. Simulation numérique de champs vectoriels stochastiques gaussiens homogènes et non homogènes. *La Recherche Aéronautique*, **1**, 41–61 (1989).
- [54] POIRION, F. ET SOIZE, C. Monte Carlo construction of Karhunen Loeve expansion for non-Gaussian random fields. Dans *Engineering Mechanics Conference, Baltimore (USA)* (1999).
- [55] POPESCU, R., DEODATIS, G. ET PREVOST, J. Simulation of homogeneous nonGaussian stochastic vector fields. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **13**(1), 1–13 (1998).
- [56] PROHOROV, Y. ET ROZANOV, Y. *Probability theory*. Springer-Verlag (1969).
- [57] PUIG, B., POIRION, F. ET SOIZE, C. Non-Gaussian simulation using hermite polynomial expansion. Dans *4th International Conference on Computational Stochastic Mechanics, Corfu* (2002).
- [58] PUIG, B., POIRION, F. ET SOIZE, C. Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion: convergences and algorithms. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **17**, 253–264 (2002).
- [59] RUBINSTEIN, R. *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons (1981).
- [60] SAKAMOTO, S. ET GHANEM, R. Simulation of non-Gaussian fields with the Karhunen-Loeve and polynomial chaos expansions. Dans *Engineering Mechanics Conference, Baltimore (USA)* (1999).
- [61] SAKAMOTO, S. ET GHANEM, R. Simulation of multi-dimensional non-Gaussian non-stationary random fields. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **17**, 167–176 (2002).
- [62] SCHWARTZ, L. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann (1965).
- [63] SCHWARTZ, L. *Théorie des distributions*. Hermann (1966).
- [64] SHINOZUKA, M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *Journal of the Acoustical Society America*, **49**(1), 357–367 (1971).
- [65] SHIRAYEV, A. *Probability*. Springer-Verlag (1984).
- [66] SHOHAT, J. ET TAMARKIN, J. The problem of moments. Dans *Mathematical Surveys*, no. 1. American Mathematical Society (1963).

- [67] SOBCZYK, K. ET TRĘBICKI, J. Maximum entropy principle in stochastic dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **5**(3), 102–110 (1990).
- [68] SOIZE, C. *Méthodes mathématiques en analyse du signal*. Masson (1993).
- [69] SPANOS, P. ET ZELDIN, B. Random field simulation using wavelet bases. Dans *Applications of Statistics and Probability*, pages 1275–1283 (1995).
- [70] SPANOS, P. ET ZELDIN, B. An optimal ARMA approximation for random field simulation. Dans *Stochastic Structural Dynamics, proceedings of the third international conference*, pages 7.89–7.93 (1997).
- [71] SPANOS, P. ET ZELDIN, B. Monte Carlo treatment of random fields: A broad perspective. *Applied Mechanics Reviews*, **51**(3), 219–237 (1998).
- [72] TALAY, D. Schéma d'Euler pour les diffusions. Cours de DEA, Université Pierre et Marie Curie.
- [73] WAGSCHAL, C. *Intégration, Dérivation*. Hermann (1999).
- [74] WIENER, N. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, **60**, 897–936 (1938).
- [75] YAMAZAKI, F. ET SHINOZUKA, M. Digital generation of non-Gaussian stochastic fields. *Journal of Engineering Mechanics*, **114**(7), 1183–1197 (1988).

Résumé :

L'objet de ce travail de recherche est de construire un modèle approché en vue de simuler les trajectoires d'un processus stochastique non gaussien strictement stationnaire sous la seule donnée (incomplète) de sa loi marginale d'ordre un, ou des N premiers moments de cette loi, et de sa fonction d'autocorrélation.

La méthode de simulation développée au cours de cette thèse s'appuie sur deux méthodes bien connues de simulation de processus gaussiens : la méthode spectrale et la markovianisation. D'autre part, si seuls les N premiers moments de la loi marginale sont donnés, le principe de maximum d'entropie est utilisé pour choisir cette loi.

À partir de la loi marginale est construite une transformation non linéaire qui est ensuite projetée sur la base des polynômes d'Hermite. Le modèle construit consiste donc en une transformation polynomiale d'un processus gaussien stationnaire standard dont la fonction d'autocorrélation est déterminée à l'aide d'un problème de minimisation.

Cette méthode de simulation est mise en oeuvre dans des exemples numériques inspirés de l'ingénierie mécanique. Enfin, les convergences en moyenne quadratique et presque-sûre du modèle ont été étudiées.

Title : Modelling and simulation of non-Gaussian stochastic processes

Abstract :

The aim of this work is to construct an approximate model in order to simulate the paths of a non-Gaussian strictly stationary process given solely the one-dimensional marginal distribution, or the N -first statistical moments of this distribution, together with the autocorrelation function. The approach developed in this thesis is based on two well-known methods of Gaussian simulation : the spectral method and the markovianization one. Moreover, if only the N -first moments of the one-dimensional marginal distribution are given, the maximum entropy principle is used to choose this distribution. Given the one-dimensional marginal distribution, a non-linear transformation is constructed. This transformation is then projected on the basis of Hermite polynomials. The model yields a polynomial transformation of a standard stationary Gaussian process which autocorrelation function is determined solving a minimization problem. The simulation method is illustrated through numerical examples issued from civil engineering. Finally, quadratic-mean and almost-sure convergences are studied.

Spécialité : Mathématiques

Mots-clés : Simulation numérique, Processus stochastique non gaussien, Processus gaussien, Polynômes d'Hermite.

Laboratoires :

Office National d'Etudes et Recherche Aéronautiques, DDSS/MS, 92320 Châtillon.

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, 175 Rue du Chevaleret, 75013 Paris.